Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Н.М. Курносенко, В.Е. Евдокимович

# ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Практическое пособие
для студентов математического и физического факультетов**

Гомель 2010

**УДК 517. 9 (075.8)**
**ББК 22.16 Я73**
**К 947**

Рецензенты:
С.П. Новиков, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики УО «БелГУТ»;
кафедра высшей математики УО «ГГУ им. Ф.Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Курносенко Н.М., В.Е.Евдокимович
К 947 Теория вероятностей и математическая статистика: практическое пособие для студентов математических и физических специальностей / Н.М.Курносенко, В.Е. Евдокимович.; Мин-во обр. РБ – Гомель: УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2010.– 94 с.

Практическое пособие подготовлено в соответствии с программой курса «Теория вероятностей и математическая статистика» и предназначено для студентов математического и физического факультетов, а также может быть использована студентами заочного факультета

В пособии четыре самостоятельные части, каждая из которых содержит перечень понятий и теорем, которыми необходимо овладеть для усвоения соответствующего раздела курса и типичные задачи, снабжённые подробными решениями, которые могут использоваться студентами для самопроверки готовности к выполнению контрольных заданий.

**УДК 517. 9 (075.8)**
**ББК 22.16 Я73**

# ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика является одной из фундаментальных дисциплин, преподаваемых студентам высших учебных заведений. Она изучает модели экспериментов со случайными исходами (случайных экспериментов). Всякий случайный эксперимент (испытание, опыт) состоит в осуществлении некоторого вполне определенного комплекса условий и наблюдении результата. Рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторить при неизменном комплексе условий произвольное число раз.

Предметом наблюдения в том или ином случайном опыте может быть некоторый процесс, физические явления или действующая система. Для реально воспроизводимого эксперимента понятие «наблюдаемый результат» означает, что существует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта с помощью того или иного прибора. Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта (случайное событие). Событие может произойти, а может не произойти в результате эксперимента.

При математической формализации модели случайного эксперимента основным пунктом является понятие множества элементарных исходов, связанного с данным экспериментом. Под этим понимают множество взаимоисключающих исходов, такое, что результатом эксперимента всегда является один и только один исход. Любое подмножество данного множества рассматривается как событие

Результат эксперимента можно охарактеризовать количественно. Количественная характеристика эксперимента состоит в определении значений некоторых величин, которыми интересуются при данном эксперименте. В силу, действия большого числа случайных факторов эти величины могут принимать различные значения в результате эксперимента. Поэтому такие величины называют случайными.

Теория вероятностей занимается изучением случайных событий и случайных величин. Математическая статистика позволяет получать обоснованные выводы о параметрах или виде закона распределения случайной величины по совокупности наблюдений над ней – выборке.

В данном пособии содержатся основные сведения из теории вероятностей и математической статистики, которые необходимы студентам для выполнения контрольных работ, а также задания для контрольных работ.

# 1 Случайные события

## 1.1 Вероятностный эксперимент. Случайные события. Пространство элементарных событий

Любой эксперимент или наблюдение изучаемого физического явления заканчивается некоторым событием (исходом). Если результат эксперимента заранее однозначно непредсказуем, то данный эксперимент называется вероятностным и обозначается символом «*E*».

Элементарным событием (элементарным исходом) $\omega$ называется любой мысленно возможный неразложимый результат вероятностного эксперимента *E*.

Пространством элементарных событий $\Omega$ называется множество всех мыслимых взаимоисключающих результатов вероятностного эксперимента *E*.

Случайным событием называется такое событие, о котором нельзя заведомо точно сказать, произойдёт оно или нет.

Случайные события обозначаются заглавными латинскими буквами (*A*, *B*, *C*, *D*, …). Случайное событие является некоторым подмножеством пространства элементарных событий ($A \subseteq \Omega$).

**Пример 1**

*E*: бросается игральная кость.

Элементарные события: $\omega_1$= {выпадение на игральной кости «1»}, $\omega_2$= {выпадение на игральной кости «2»} и т. д. Пространство элементарных событий $\Omega$= {выпадение на игральной кости числа от «1» до «6»} = $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Тогда случайные события:

*A* = {выпадение чётного числа} = $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$;

*B* = {выпадение нечётного числа} = $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$;

*C* = {выпадение «5»} = $\{\omega_5\}$;

*D* = {невыпадение «3»} = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;

*F* = {выпадение числа от «3» до «5»} = $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$;

*G* = {выпадение числа > 4} = $\{\omega_5, \omega_6\}$;

*I* = {выпадение числа < 4} = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

В зависимости от размерности множества возможных элементарных событий, различают конечное, счётное и несчётное пространство элементарных событий $\Omega$.

В примере 1 пространство элементарных событий $\Omega$ является конечным, поскольку включает лишь 6 элементарных событий. В эксперименте с исследованием числа поездов, прибывающих на станцию в течение суток, пространство элементарных событий $\Omega$ счётно, т.к. каждому элементарному событию эксперимента можно поставить в однозначное соответствие число натурального ряда. В эксперименте с исследованием времени обслуживания поезда на станции, пространство элементарных событий $\Omega$ несчётно, т. к. время обслуживания может принимать любые положительные значения.

Элементарные события, которые образуют случайное событие *A*, называются благоприятными событию *A*.

В примере 1 элементарные события $\omega_2$, $\omega_4$, $\omega_6$ являются благоприятными событию *A*, элементарные события $\omega_1$, $\omega_3$, $\omega_5$ – благоприятными событию *B* и т. д.

В частном случае множество элементарных исходов, благоприятных событию *A*, может совпадать с пространством элементарных событий $\Omega$ или быть пустым множеством $\varnothing$.

Достоверным событием называется событие, которое всегда происходит, т. е. совпадающее с пространством элементарных событий $\Omega$.

Невозможным событием называется событие, которое никогда не произойдёт, т. е. совпадающее с пустым множеством.

В примере 1 достоверным событием является случайное событие $K$ = {выпадение числа от «1» до «6»} = $\Omega$, а невозможным событием является, например, случайное событие $L$ = {выпадение числа «7»} = $\varnothing$.

## 1.2 Операции над событиями

Пусть имеется пространство элементарных событий $\Omega$. Будем рассматривать в качестве случайных событий подмножества *A*, *B*, *C*, … этого пространства.

Суммой (объединением) событий *A* и *B* называется третье событие *A*+*B* $(A \cup B)$, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий А или В. Благоприятными событию $A \cup B$ являются все элементарные события, благоприятные хотя бы одному из событий *A* или *B*.

Аналогично определяется сумма любого числа событий $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots$.

Произведением (пересечением) событий *A* и *B* называется третье событие $AB (A \cap B)$, состоящее в одновременном осуществлении событий $A$ и $B$. Благоприятными событию $A \cap B$ являются все элементарные события, благоприятные одновременно событию $A$ и событию $B$.

Произведение любого числа событий $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots$ состоит в одновременном осуществлении событий $A_1$, $A_2$, $A_3$ и т. д.

Разностью событий $A$ и $B$ называется третье событие $A$–$B$ ($A \backslash B$), состоящее в осуществлении события $A$ без осуществления события $B$. Событие $A \backslash B$ состоит из элементарных событий благоприятных событию $A$, за исключением элементарных событий благоприятных событию $B$.

Противоположным событию $A$ называется событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события $A$. Событию $\overline{A}$ благоприятны все возможные элементарные события пространства элементарных событий $\Omega$, кроме тех, которые благоприятны событию $A$ ($\overline{A} = \Omega \setminus A$).

События $A$ и $B$ называются несовместными, если они не могут произойти одновременно, т. е. одновременное осуществление событий $A$ и $B$ есть событие невозможное ($A \cap B = \varnothing$).

События $A_1$, $A_2$, $A_3$, …, $A_n$ образуют полную группу событий, если их сумма составляет пространство элементарных событий $\Omega$ ($A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$), т. е. в результате эксперимента хотя бы одно из событий произойдёт.

**Пример 2**

Рассмотрим операции над событиями, используя условия из примера 1.

а) $A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\} = \Omega$;
$A \cup C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;
$C \cup I = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$;
$C \cup D = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;
$F \cup G = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;

б) $A \cap B = \varnothing$;
$B \cap C = \{\omega_5\}$;
$D \cap F = \{\omega_5, \omega_6\}$;
$G \cap I = \varnothing$;
$C \cap G = \{\omega_5\}$;

в) $A \setminus B = \varnothing$;
$B \setminus C = \{\omega_1, \omega_3\}$;
$D \setminus F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_6\}$;
$G \setminus I = \{\omega_5, \omega_6\} = G$;
$G \setminus C = \{\omega_6\}$;

г) $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = B$;

$\overline{B} = \Omega \setminus B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = A$;

$\overline{C} = \Omega \setminus C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$;

$\overline{D} = \Omega \setminus D = \{\omega_3\}$;

$\overline{F} = \Omega \setminus F = \{\omega_1, \omega_2, \omega_6\}$;

д) События $A$ и $B$ образуют полную группу событий, т. к. $A \cup B = \Omega$.

**Пример 3**

$E$: в прямоугольник (рисунок 1) наудачу бросается точка.

Элементарное событие данного эксперимента – некоторая точка внутри прямоугольника. Пространство элементарных событий $\Omega$ (в данном случае – несчётное) – всё множество точек внутри прямоугольника. На множестве $\Omega$ определены два события: $A$=$\{$выбранная точка лежит внутри круга $A\}$ и $B = \{$ выбранная точка лежит внутри круга $B\}$.

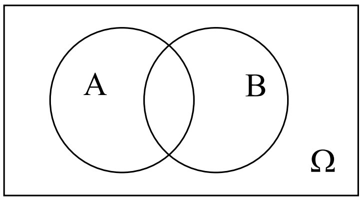
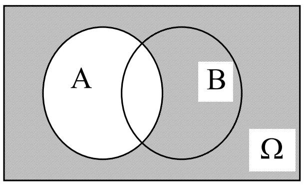
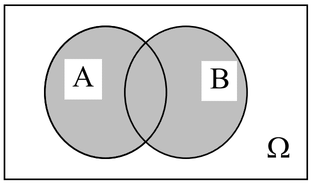



Рисунок 1 – Диаграмма Венна-Эйлера

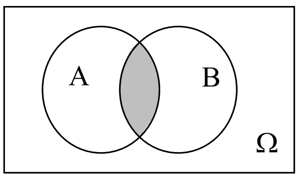
Изобразим области, попадание в которые соответствует осуществлению событий $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$:



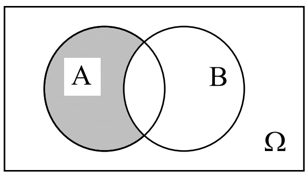

$\overline{A}$




$A \cup B$



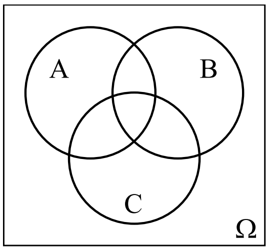

$A \cap B$



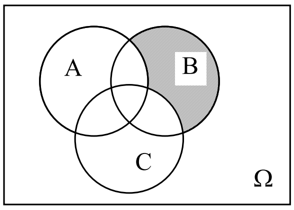

$A \setminus B$

**Пример 4**

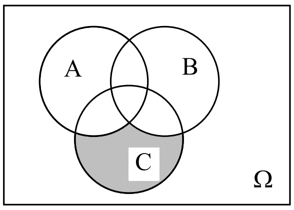
$E$: в прямоугольник наудачу бросается точка.



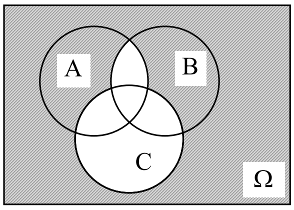

На множестве $\Omega$ определены три события: $A$ = {выбранная точка лежит внутри круга $A$}, $B$ = {выбранная точка лежит внутри круга $B$}, $C$ = {выбранная точка лежит внутри круга $C$}. Изобразим области, попадание в которые соответствует осуществлению следующих событий $\overline{A}\cap(B\setminus C)$, $(\overline{A\cup B})\cap C$, $\overline{A\cap B}\setminus C$, $A\setminus B\cup C$:



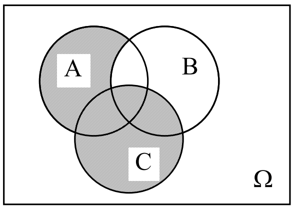

$\overline{A}\cap(B\setminus C)$




$(\overline{A\cup B})\cap C$




$\overline{A\cap B}\setminus C$




$A\setminus B\cup C$

## 1.3 Классическое определение вероятности

Пусть эксперимент имеет конечное число $n$ исходов (элементарных событий), причем все исходы равновозможны (т.е. им можно поставить в соответствие одну и ту же вероятность $p(\omega_i)=\frac{1}{n}$). Тогда для определения вероятности любого события $A$, связанного с данным экспериментом, используют так называемое классическое определение вероятности, согласно которому вероятность события $A$ определяется как $P(A)=\frac{k}{n}$, где $k$ – число исходов, благоприятствующих событию $A$, $n$ – число всех возможных исходов эксперимента.

Задачи «на классическое определение вероятности» часто называют комбинаторными задачами теории вероятностей, поскольку $k$ и $n$ находят комбинаторным путем. Рассмотрим примеры.

**Пример 5**

Тщательно перемешиваются и выкладываются в ряд 5 карт с буквами «Т», «О», «Ч», «К», «А». Найти вероятность того, что мы получим слово «ТОЧКА».

**Решение.** При единственном благополучном исходе мы имеем всего 5!=120 различных возможных исходов. Это число равно числу различных перестановок 5-ти элементов. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{1}{120}.$$

Вообще говоря, при всем многообразии задач с конечным числом равновозможных исходов, решение большинства из них сводится к вычислению числа исходов (как возможных, так и благоприятствующих некоторому событию $A$) следующего эксперимента.

Рассмотрим совокупность $M$ занумерованных элементов. Пусть требуется образовать выборку из $m$ элементов, взятых из этой совокупности, а затем подсчитать число таких выборок. Понятно, что существуют 2 способа выбора элементов: с возвращением и без возвращения. В первом случае номера элементов фиксируются, а сами элементы возвращаются обратно в исходную совокупность. В этом случае выборка может содержать одинаковые элементы (и объем ее может быть большим $M$, то есть большим чем объем исходной совокупности), в отличие от случая, когда выбор происходит без возвращения (понятно, что $m \le M$). Иногда существенен порядок расположения элементов в выборке.

Другими словами, выборки могут быть упорядоченными и неупорядоченными. Если выборки неупорядоченные и имеют одинаковый состав, но различный порядок следования, то они считаются различными. Для неупорядоченных выборок, выборки с одинаковым составом отождествляются.

Все результаты о числе исходов в случае $m$ извлечений из совокупности, содержащей $M$ различных элементов, можно свети в таблицу:

*Таблица 1* – **Числа выборок объёма *m***

| | | |
|---|---|---|
| $M^m$ | $C_{M+m-1}^m$ | Выборка с возвращением |
| $A_M^m$ | $C_M^m$ | Выборка без возвращения |
| Упорядоченные наборы | Неупорядоченные наборы | Выбор / Набор |

Замечание. $C_M^m = \frac{M!}{m!(M-m)!}$; $A_M^m = \frac{M!}{(M-m)!}$; $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$;

по определению 0!=1.

**Пример 6**

Пять человек в лифте 8-этажного дома могут выйти на любом этаже, начиная со 2-го. Найти вероятность того, что все они выйдут на разных этажах.

**Решение.** Найдем число всех возможных исходов. Отождествляя выход из лифта любым из 5 человек (выбор этажа) с выбором элемента из совокупности объема 7, заметим, что выбор происходит с возвращением (два и более человек могут выбрать для выхода один и тот же этаж) и набор – упорядоченный (существенно, на каком именно этаже выходит конкретное лицо). Т.о. число различных способов выйти из лифта 5 человек или, другими словами, число способов выбора любого из 7 этажей 5 людьми (число выборок объема 5 из совокупности элементов объема 7) равно $7^5$.

Число благоприятных исходов подсчитывается аналогично с этой лишь разницей, что выбор происходит без возвращения (люди выходят на разных этажах). Искомая вероятность равна $P(A) = \frac{A_7^5}{7^5}$.

## 1.4 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вероятность суммы событий *A* и *B* определяется выражением

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB).$$

Если события А и В несовместны, то

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Условная вероятность наступления события *A* в предположении, что событие В наступило $(P(B) \neq 0)$, определяется по формуле

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Вышеупомянутые равенства можно записать в следующем виде:

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

По индукции легко получить более общую формулу

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2)\ldots P(A_n / A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

если $P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_{n-1}) \neq 0$.

**Пример 7**

Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 подряд выбранных билета окажутся выигрышными.

**Решение.** Через $A$ и $B$ обозначим события, состоящие соответственно в том, что первый и второй билеты выигрышные Вероятность того, что первый билет выигрышный, равна $P(A) = \frac{5}{100}$.

Вероятность того, что второй билет выигрышный, при условии, что первый билет выигрышный, равна $P(B/A) = \frac{4}{99}$ (если первый билет выигрышный, то всего остается 99 билетов, среди которых 4 выигрышных). Искомая вероятность того, что оба билета выигрышные, равна

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = \frac{1}{495}.$$

## 1.5 Формула полной вероятности

Пусть $A$ – произвольное событие, события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместимы, $P(H_k) \neq 0,\ k = \overline{1,n},$ и $A \subset H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$. Тогда имеет место следующая формула (формула полной вероятности):

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A/H_k).$$

Отметим, что если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу, то есть $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$, $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то условие $A \subset H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n$

автоматически выполняется и справедлива формулировка полной вероятности. Здесь $\Omega$ и $\varnothing$ – соответственно достоверное и невозможное события.

**Пример 8**

На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. Брак их продукции составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт окажется дефектным?

**Решение.** Обозначим через $A$ событие, состоящее в том, что случайно выбранный болт – дефектный, а через $H_{1,}, H_2,\ H_3$ – события, состоящие в том, что этот болт произведен соответственно первой, второй и третьей машинами. Используя условие задачи, получим $P(H_1)=0,25;$ $P(H_2)=0,35;$ $P(H_3)=0,40$ и $P(A/H_1)=0,25;$ $P(A/H_2)=0,04;$ $P(A/H_3)=0,02$. Применяя формулу полной вероятности, получим (ведь $H_{1,}, H_2,\ H_3$ образуют полную группу)

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0,25\cdot 0,05+0,35\cdot 0,04+0,40\cdot 0,02=0,0345$$

## 1.6 Формула Байеса

Пусть событие $A$ может протекать в различных условиях, относительно характера которых было сделано $n$ предположений (гипотеза) $H_{1,}, H_2, \ldots, H_n$ (математически это означает, что $H_{1,}, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу).

Пусть вероятности $P(A/H_i)$ $(i=\overline{1,n})$ как-либо известны до испытания.

Известно, что событие (гипотеза) $H_i\,(i=\overline{1,n})$ сообщает событию $A$ вероятность $P(A/H_i)$. Произведен опыт, в котором событие $A$ наступило. Это должно вызвать переоценку вероятностей событий (гипотез) $H_i\,(i=\overline{1,n})$, при условии, что $A$ наступило. Формула Байеса количественно решает этот вопрос. Имеем

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(H_1)P(A/H_1)+\ldots+P(H_n)P(A/H_n)},\ \text{если}\ P(A)\neq 0.$$

**Пример 9**

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй 70%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

**Решение.** Обозначим через $A$ событие – деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотезы): $H_1$ – деталь произведена первым автоматом, $H_2$ – вторым, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй), то $P(H_1)=\frac{2}{3}$; $P(H_2)=\frac{1}{3}$. Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P(A/H_1)=\frac{6}{10}$, вторым – $P(A/H_2)=\frac{7}{10}$. Так как $H_1$ и $H_2$ – противоположные события, то они образуют полную группу. Вероятность того, что взятая деталь отличного качества произведена первым автоматом, по формуле Байеса равна

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}}=\frac{12}{19}$$

## 1.7 Последовательности независимых испытаний

Если производится несколько испытаний, таких, что вероятность некоторого события $A$ в каждом из испытаний не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события $A$.

Схемой Бернулли называют последовательность независимых испытаний, в каждом из которых возможны два исхода $A$ (успех) и $\overline{A}$ (неудача), причем вероятности $P(A)=p$ и $P(\overline{A})=q$ неизменны для всех испытаний.

Пусть проведено $n$ испытаний Бернулли. Тогда исход этой серии экспериментов можно представить в виде комбинации исходов каждого эксперимента серии:

$$\omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}, \qquad (1.7.1)$$

где $\omega_i=\begin{cases}\text{"у"}, & \text{если в } i\text{-м испытании произошёл успех;}\\ \text{"н"}, & \text{если в } i\text{-м испытании произошла неудача.}\end{cases}$

Обозначим через $k$ количество успехов в $n$ испытаниях Бернулли. Тогда вероятность того, что в $n$ испытаниях Бернулли произойдёт ровно $k$ успехов, определяется формулой

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (k=\overline{0,n}). \qquad (1.7.2)$$

Формула (1.7.2) называется *формулой Бернулли*.

**Пример 10**

Найти вероятность того, что событие *A* появится: а) ровно 3 раза в 4-х независимых испытаниях; б) не менее двух раз, если вероятность появления события *A* в каждом испытании равна $p$=0,4.

**Решение.** Т.к. испытания независимы и вероятность появления события *A* постоянна для всех испытаний, воспользуемся формулой Бернулли. В нашем случае $n$=4, $k$=3, $p$=0,4 и $q$=1–$p$=0,6. Тогда:

$$P_4(3) = C_4^3 (0{,}4)^3 (0{,}6)^1 = 0{,}1536;$$

$$P(k \geq 2) \quad P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) \quad C_4^2 (0{,}4)^2 (0{,}6)^2 + C_4^3 (0{,}4)^3 0{,}6 + C_4^4 (0{,}4)^4 (0{,}6)^0 = 0{,}5248.$$

Заметим, что если $n$ достаточно велико (порядка сотен, тысяч и т.д.) и нахождение точных значений вероятностей $P_n(k)$ весьма затруднительно на практике, находят приближенные значения этих вероятностей. Как правило, если вероятность р достаточно «мала» (порядка сотых, тысячных и т.д.), используют теорему Пуассона. В противном случае хорошее приближение дают формулы локальной или интегральной теорем Муавра-Лапласа.

**Теорема Пуассона**: пусть проводится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* наступает с вероятностью р. Тогда, если число испытаний неограниченно возрастает ,0<$p$<1, причем $\lambda = np$ , величина постоянная, то

$$\lim_{n \to \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Указанную выше формулу называют формулой Пуассона.

**Локальная теорема Муавра-Лапласа**: Если вероятность р появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие А появится в n независимых испытаниях ровно k раз, приближенно равна значению функции

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

**Интегральная теорема Муавра-Лапласа**: Если вероятность $p$ появления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие $A$ появится в $n$ независимых испытаниях от $k_1$ до $k_2$ раз приближенно равна

$$P_n(k_{1,}k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

Где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k - npq}{\sqrt{npq}}$.

**Пример 11**

Завод отправил потребителю 10000 изделий, каждое из которых имеет брак с вероятностью 0,0001. Найти вероятность того, что в отправленной партии содержится ровно 3 бракованных изделия.

**Решение**. По условию $n$=10000, $p$=0,000, $k$=3. Значит $\lambda = np \quad 10000 \cdot 0{,}0001 = 1$. Воспользуемся теоремой Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Имеем: $P_{10000}(3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e}$.

**Пример 12**

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах будет: а) ровно 80 попаданий; б) от 80 до 100 попаданий.

**Решение.** а) Воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. По условию $n$=100, $p$=0,8; $q$=1–$p$=1–0,8=0,2.

Тогда $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \quad 0$.

Поэтому $P_{100}(80) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} \cdot \varphi(0) = \frac{1}{4} \cdot 0{,}3989 = 0{,}099725$.

б) Воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа:

$n = 100; \quad k_1 = 80; \quad k_2 = 100$

$$x = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 0$$

$$x = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

Значит, $P_{100}(80;100) = \Phi(5) - \Phi(0) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5.$

# 2 Одномерные случайные величины

## 2.1 Дискретные и непрерывные случайные величины

Случайные величины – это величины, измеряемые в случайных экспериментах. Можно сказать, что случайная величина – это функция, определенная на данном пространстве элементарных событий и ставящая в соответствие каждому элементарному событию некоторое действительное число $x$. Случайные величины обозначаются прописными буквами $X,Y,Z \ldots$.

Случайная величина $X$ называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно. Каждое возможное значение дискретная случайная величина $X$ принимает с определенной вероятностью.

Примером дискретной случайной величины будет число очков, выпавших при однократном подбрасывании игральной кости, число звонков, поступивших на АТС в течение определенного промежутка времени и т.д.

Случайная величина $X$ называется непрерывной, если множество возможных значений этой величины непрерывно заполняет некоторый промежуток числовой оси.

Примером непрерывной случайной величины может служить время работы персонального компьютера с момента его включения до момента его выключения.

Функцией распределения случайной величины $X$ называется функция $F_X(x)$ $-\infty < x < +\infty$, выражающая вероятность того, что $X$ примет значение меньше $x$:

$$F_x(x) = P\{X < x\} \tag{2.1.1}$$

Эта функция обладает свойствами:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 1$;
2. $F_X(x)$ – неубывающая функция;
3. $F_X(x)$ – непрерывна слева в каждой точке $x \in (-\infty, +\infty)$;
4. $P\{a \le X < b\} = F_X(b) - F_X(a)$.

Дискретную случайную величину можно задавать с помощью ряда распределения (таблица 2).

*Таблица 2* – **Ряд распределения дискретных случайных величин**

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

где $x_i, i = 1,2, \ldots,$ – все возможные значения; $p_i = P\{X = x_i\}$, $\sum_{i-1}^{\infty} p_i = 1$.

Случайная величина $X$ называется непрерывной, если существует такая функция $f_X(x)$, что для любого $x \in (-\infty, +\infty)$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \tag{2.1.2}$$

при этом функция $f_X(x)$ называется плотностью распределения величины $X$.

Плотность распределения имеет свойства:

1. $f_X(x) \le 0$;
2. $f_X(x) = F_X^1(x)$, кроме точек, в которых производная не существует.

В точках, где $f_X(x)$ недифференцируема, плотность $f_X(x)$ полагается равной любому неотрицательному числу;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y)dy = 1$;
4. $P\{a < X < b\} + \int_{a}^{b} f_X(y)dy$.

График плотности распределения называют кривой распределения.

Таким образом, закон распределения случайной величины можно задать функцией распределения, либо рядом распределения (для дискретной случайной величины), либо плотностью распределения (для непрерывной случайной величины).

## 2.2 Числовые характеристики случайных величин

**Математическим ожиданием** случайной величины $X$ называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ – для дискретной случайной величины $X$ (2.2.1)

$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$ – для непрерывной случайной величины $X$. (2.2.2)

Предполагается, что соответствующие ряд и интеграл сходятся абсолютно.

**Дисперсией случайной величины** $X$ называется величина

$$D[X] = M\left[X - MX\right]^2 \tag{2.2.3}$$

Ее вычисляют по формулам:

$$D[X] = \sum_{i-1}^{\infty} \left[x_i - MX\right]^2 p_i - \text{для дискретной } X; \tag{2.2.4}$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f_X(x)dx \ - \text{для непрерывной } X. \tag{2.2.5}$$

Величина $\delta_X = \sqrt{D[X[}$ называется средним квадратичным отклонением величины $X$.

**<u>Моментом случайной величины</u>** $x$ $k$-го порядка называется число $M[(X-a)^k]$, где $a$ – произвольное число. Если $a = 0$, то момент случайной величины называется начальным $(\nu_k = M[X^k])$, если $a = M[X]$, то момент случайной величины $X$ называется центральным моментом $k$-го порядка $(\mu_k = M[(X - M[X])^k])$.

Очевидно, что $\nu_0 = M[X^0] = 1$; $\nu_1 = M[X]$; $\nu_2 = M[X^2]$; $\mu_0 = M[(X - M[X])^0] = 1$; $\mu_1 = M[X - M[X]] = M[X] - M[M[X]] =$
$= M[X] - M[X] = 0$; $\mu_2 = M[(X - M[X])^2] = D[X]$.

При этом центральные и начальные моменты связаны между собой следующими соотношениями:

$\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2$; $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^{\ 2}$; $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^{\ 2} - 3_1^4$.
Рассмотрим несколько важных особенностей центральных моментов старших порядков.

**<u>Коэффициентом асимметрии</u>** (скошенности) распределения случайной величины $X$ называется число, вычисляемое по формуле

$$\beta_1[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M[(X - M[X])^3]}{\sigma^3} \tag{2.2.5}$$

Если распределение вероятностей случайной величины скошено влево, то $\beta_1[X] > 0$ (рисунок 2, а); если вправо, то $\beta_1[X] < 0$ (рисунок 2, б), если же распределение вероятностей случайной величины $X$ симметрично относительно математического ожидания $M[X]$, то $\beta_1[X] = 0$.

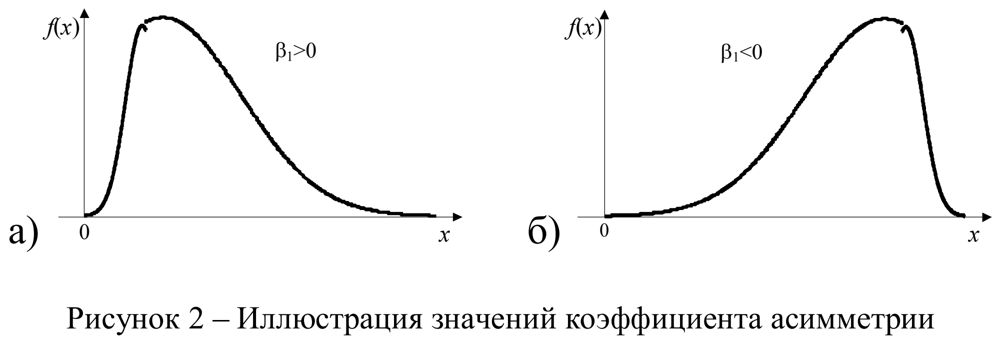



Рисунок 2 – Иллюстрация значений коэффициента асимметрии различных случайных величин

**<u>Коэффициентом эксцесса</u>** случайной величины $X$ называется число $\beta_2[X]$, характеризующее островершинность распределения случайной величины $X$ по сравнению с нормальным распределением и определяемое по формуле

$$\beta_2[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \qquad (2.2.6)$$

У случайной величины $X$, имеющей нормальный закон распределения коэффициент эксцесса равен нулю, т. е. $\beta_2[X] = 0$. У случайных величин с более островершинным распределением $\beta_2[X] > 0$, а у величин с менее островершинным – $\beta_2[X] < 0$ (рисунок 3).

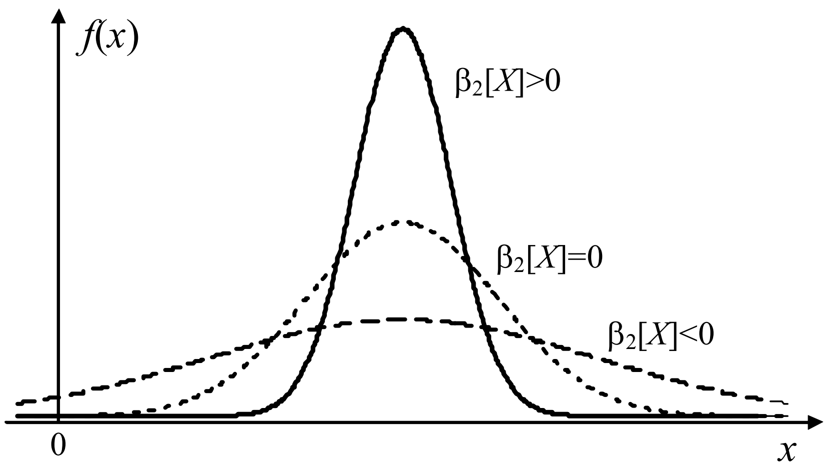



Рисунок 3 – Иллюстрация значений коэффициента эксцесса различных случайных величин

**Пример 13**

Товаровед проверяет партию изделий на стандартность, но при этом исследует только три изделия. Вероятность того, что проверяемое изделие будет признано стандартным, равна 0,4. Составить закон распределения числа изделий, признанных стандартными. Найти математическое ожидание и дисперсию полученной случайной величины.

**Решение.** Обозначим через $X$ – число изделий, признанных стандартными среди проверенных. $X$ может принять только одно из значений 0; 1; 2; 3. Вероятность этих значений определим по формуле Бернулли:

$$p_0 = P\{X = 0\} = P_3(0) = C_3^0 \cdot (0{,}4)^0 \cdot (0{,}6)^3 = 0{,}216;$$

$$p_1 = P\{X = 1\} = P_3(1) = C_3^1 \cdot (0{,}4)^1 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}432;$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = P_3(2) = C_3^2 \cdot (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^1 = 0{,}288;$$
$$p_3 = P\{X = 3\} = P_3(6) = C_3^3 \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}6)^0 = 0{,}064;$$

Составляем ряд распределения величины $X$:

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

$$\sum_{i=0}^{3} p_i = 0{,}216 + 0 < 432 + 0{,}288 + 0{,}064 = 1.$$

Вычисляем числовые характеристики случайной величины $X$ по формулам (2.2.1) и (2.2.4):

$$M[X] = 0 \cdot 0{,}216 + 1 \cdot 0{,}432 + 2 \cdot 0{,}288 + 3 \cdot 0{,}064 = 1{,}2;$$
$$D[X] = (0-1{,}2)^2 \cdot 0{,}216 + (1-1{,}2)^2 \cdot 0{,}432 + (2-1{,}2)^2 \cdot 0{,}288 +$$
$$+(3-1{,}2)^2 \cdot 0{,}064 = 0{,}72.$$

**Пример 14**

Плотность распределения случайной величины $Y$ имеет вид

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины $Y$ и вероятность попадания этой величины на $(0, \frac{\pi}{4})$.

**Решение.** Вычисления проводим по формулам (2.2.1), (2.2.5) и свойству 4 плотности распределения:

$$MY = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x)dx = \int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\cos x) = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 0 + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$DY = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MY)^2 f_Y(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^2 \sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^2 d(\cos x) =$$

$$= -(x-1)^2 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(x-1)\cos x\, dx = 1 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) d(\sin x) =$$

$$=1+2\left[\left.(x-1)\sin x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\right]=1+2\left[\frac{\pi}{2}-1+\left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=1+\pi-2-2=\pi-3.$$

$$P\left\{0\le Y<\frac{\pi}{4}\right\}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f_Y(x)dx=\int\limits_0^{\frac{2}{4}}\sin x\,dx=-\left.\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{2}{4}+\cos 0=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\approx 0{,}3$$

## 2.3 Законы распределения случайных величин

### 2.3.1 Биномиальное распределение

Говорят, что дискретная случайная величина $X$ имеет биномиальное распределение, если возможные значенич этой случайной величины есть 0, 1,…,$n$, а вероятности, с которыми $X$ принимает указанные возможные значения, определяются по формуле Бернулли

$$P\{X=k\}=P_n(k)=C_n^k\,p^k\,q^{n-k},\ 0<p<1,\ p+q=1.$$

Математическое ожидание $M[X]=np$, а дисперсия – $D[X]=npq$.

**Пример 15**

В автобусном парке имеется пять автобусов. Вероятность выхода на линию каждого из них равна 0,8. Случайная величина $X$ – число вышедших на линию машин. Построить ряд распределения и вычислить функцию распределения данной случайной величины. Вычислить её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непосредственно по ряду распределения и сравнить со значениями, которые получаются при использовании формул M[$X$]=$np$ и D[$X$]=$npq$. Найти вероятность того, что в определенный день на линию выйдут не менее четырёх автобусов.

**Решение.** Предполагая, что выходы автобусов на линию осуществляются независимо друг от друга, условие задачи можно рассматривать как серию из $n=5$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события $A$ = {выход автобуса на линию} равна 0,8. Случайная величина $X$, обозначающая число вышедших на линию машин, распределена по биномиальному закону. Возможные значения случайной величины $X$: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вероятности значений определяются по формуле Бернулли:

$P(X=0)=C_5^0p^0q^5=1\cdot 1\cdot 0{,}2^5=0{,}00032$;

$P(X=1)=C_5^1 p^1 q^4 = 5\cdot 0,8\cdot 0,2^4 = 0,0064$;

$P(X=2)=C_5^2 p^2 q^3 = 10\cdot 0,8^2\cdot 0,2^3 = 0,0512$;

$P(X=3)=C_5^3 p^3 q^2 = 10\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2 = 0,2048$;

$P(X=4)=C_5^4 p^4 q^1 = 5\cdot 0,8^4\cdot 0,2^1 = 0,4096$;

$P(X=5)=C_5^5 p^5 q^0 = 1\cdot 0,8^5\cdot 1 = 0,32768$.

Ряд распределения имеет вид:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,00032 | 0,0064 | 0,0512 | 0,2048 | 0,4096 | 0,32768 |

Убедимся, что $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Определим значение функции распределения $F(x)=P(X<x)$ для всех возможных значений *x*:

при $x\in(-\infty;0]$, $F(x)=P(X<0)=0$;

при $x\in(0;1]$, $F(x)=P(X=0)=0,00032$;

при $x\in(1;2]$, $F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0,00032+0,0064=0,00672$;

при $x\in(2;3]$, $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=0,00672+0,0512=0,05792$;

при $x\in[3;4)$, $F(x)=P(X=0)+\ldots+P(X=3)$

$=0,05792+0,2048=0,26272$;

при $x\in[4;5)$, $F(x)=P(X=0)+\ldots+P(X=4)$

$=0,26272+0,4096=0,67232$;

при $x\in[5;+\infty)$, $F(x)=P(X=0)+\ldots+P(X=5)$

$=0,67232+0,32768=1$.

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\in(-\infty;0];\\ 0{,}00032, & \text{при } x\in(0;1];\\ 0{,}00672, & \text{при } x\in(1;2];\\ 0{,}05792, & \text{при } x\in(2;3];\\ 0{,}26272, & \text{при } x\in(3;4];\\ 0{,}67232, & \text{при } x\in(4;5];\\ 1, & \text{при } x\in[5;+\infty). \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображён на рисунке 4.

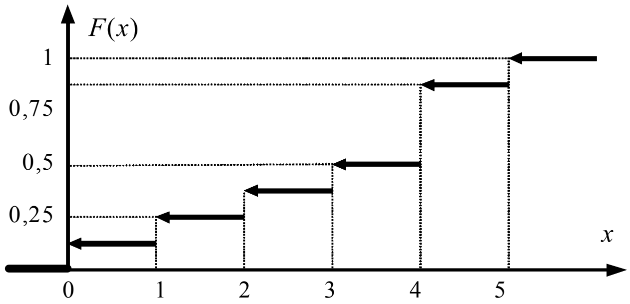



Рисунок 4 – График функции *F(x)*

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины:

а) математическое ожидание

$$M[X]=\sum_{i=1}^{6}x_i p_i = 0\cdot 0,00032+1\cdot 0,0064+2\cdot 0,0512+3\cdot 0,2048+$$
$$+4\cdot 0,4096+5\cdot 0,32768=4 \text{ (автобуса)};$$

б) дисперсия

$$D[X]=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i-(M[X])^2= 0\cdot 0,00032+1\cdot 0,0064+4\cdot 0,0512+$$
$$+9\cdot 0,2048+16\cdot 0,4096+25\cdot 0,32768-4^2=0,8 \text{ (автобуса}^2\text{)};$$

в) среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0,8}\approx 0,894 \text{ (автобуса)};$$

Вычислим числовые характеристики данной случайной величины по формулам M[$X$]=$np$ и D[$X$]=$npq$:

$$M[X]=np=5\cdot 0,8=4;\ D[X]=np(1-p)=0,8.$$

Как и следовало ожидать, получены точно такие же значения.

Вероятность того, что в определенный день на линию выйдут не менее четырёх автобусов,

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=0,4096+0,32768=0,73728.$$

## 2.3.2 Распределение Пуассона

Говорят, что случайная величина $X$ имеет распределение Пуассона, если ее возможные значения есть 0, 1,…,$n$, …, а соответствующие им вероятности определяются по формуле

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda=np$$

Для этой случайной величины $M[X]=\lambda$, $D[X]=\lambda$

### 2.3.3 Равномерное распределение

Говорят, что случайная величина $X$ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, если плотность распределения вероятностей постоянна на этом отрезке. С учетом свойств плотности распределения получаем, что

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Функция распределения вероятностей величины X имеет вид

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

Для этой случайной величины $M[X]=\dfrac{a+b}{2}$, $D[X]=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

### 2.3.4 Показательное (экспоненциальное) распределение

Говорят, что случайная величина $X$ имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если плотность распределения вероятностей $X$ есть

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Функция распределения вероятностей величины X имеет вид

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

Для этой случайной величины $M[X]=\dfrac{1}{\lambda}$, $D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}$

### 2.3.5 Нормальное распределение

Говорят, что случайная величина $X$ имеет нормальное распределение, если плотность распределения вероятностей $X$ есть

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения вероятностей величины $X$ имеет вид

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Для этой случайной величины $M[X] = a$, $D[X] = \sigma^2$.

Вероятность попадания величины $X$ в промежуток $(\alpha, \beta)$ определяется по формуле

$$P\{\alpha \le x < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа, значения которой находятся по таблицам (см. Приложение Б).

# 3 Многомерные случайные величины

## 3.1 Понятие многомерной случайной величины

Результат вероятностного эксперимента может иногда характеризоваться не одним, а одновременно несколькими числами. Например, местоположение корабля в море – пара величин $(X, Y)$, указывающая значения широты $X$ и долготы $Y$. Если при этом учитывать время $Z$, тогда мы имеем дело с трехмерной случайной величиной $(X, Y, Z)$. Успеваемость студента в семестре – $n$-мерная случайная величина $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$, компоненты которой – оценки по каждой из $n$ дисциплин.

Многомерной ($n$-мерной) случайной величиной называется функция $X(\omega)$, определенная на множестве элементарных событий $\Omega$, которая каждому элементарному исходу $\omega$ ставит в соответствие $n$ действительных чисел. Таким образом многомерная ($n$-мерная) случайная величина является совокупностью $n$ одномерных величин (компонентов).

Все компоненты многомерной дискретной случайной величины – одномерные дискретные случайные величины. Все компоненты многомерной непрерывной случайной величины – одномерные непрерывные случайные величины. Многомерные смешанные случайные величины содержат как дискретные, так и непрерывные компоненты.

Основной характеристикой многомерной случайной величины является закон распределения, который (как и для одномерных величин) может быть задан таблично, графически или аналитически (функция распределения, функция плотности распределения и т. д.).

**Пример 16**

В ящике находится 5 шаров, пронумерованных цифрами «1», «1», «2», «2», «2». Последовательно извлекают два шара. Пусть случайная величина $X$ – число на 1-м выбранном шаре, $Y$ – число на 2-м шаре. Требуется найти табличный закон распределения (матрицу распределения) двумерной случайной величины $(X, Y)$. Определить вероятность того, что второй шар будет иметь метку «1».

**Решение.** Определим вероятности возможных значений двумерной случайной величины $(X, Y)$ и заполним матрицу распределения:

$(X, Y) = (1; 1)$:

$$P(X=1;\ Y=1)=P(\{X=1\}\cap\{Y=1\})=P(X=1)P(Y=1\mid X=1)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=0{,}1$$

$(X,Y)=(1;\ 2)$:

$$P(X=1;\ Y=2)=P(\{X=1\}\cap\{Y=2\})=P(X=1)P(Y=2\mid X=1)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=0{,}3;$$

$(X,Y)=(2;\ 1)$:

$$P(X=2;\ Y=1)=P(\{X=2\}\cap\{Y=1\})=P(X=2)P(Y=1\mid X=2)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)=0{,}3;$$

$(X,Y)=(2;\ 2)$:

$$P(X=2;\ Y=2)=P(\{X=2\}\cap\{Y=2\})=P(X=2)P(Y=2\mid X=2)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{4}\right)=0{,}3.$$

*Таблица 3* – **Матрица распределения двумерной случайной величины**

| $(X,\ Y)$ | $Y=1$ | $Y=2$ |
|---|---|---|
| $X=1$ | 0,1 | 0,3 |
| $X=2$ | 0,3 | 0,3 |

Очевидно, что сумма вероятностей всех значений многомерной случайной величины равна единице.

Вероятность того, что второй шар будет иметь метку «1», определим как сумму вероятностей в столбце «$Y=1$» матрицы распределения. Таким образом, $P(Y=1)=0{,}1+0{,}3=0{,}4$.

## 3.2 Функция распределения двумерной случайной величины

Функцией распределения двумерной случайной величины $(X,\ Y)$ или совместной функцией распределения случайных величин $X$ и $Y$ называется функция $F_{XY}(x,\ y)$, равная вероятности того, что компонент $X$ примет значение меньшее, чем $x$, а компонент $Y$ – значение меньшее, чем $y$,

$$F_{XY}(x,y)=P(X<x,Y<y)=P(\{X<x\}\cap\{Y<y\}). \tag{3.2.1}$$

Таким образом, функция распределения двумерной случайной величины $F_{XY}(x,y)$ в точке $(x,y)$ определяет вероятность, с которой двумерная случайная величина примет значение в нижнем левом квадранте относительно точки $(x,y)$ (рисунок 29).

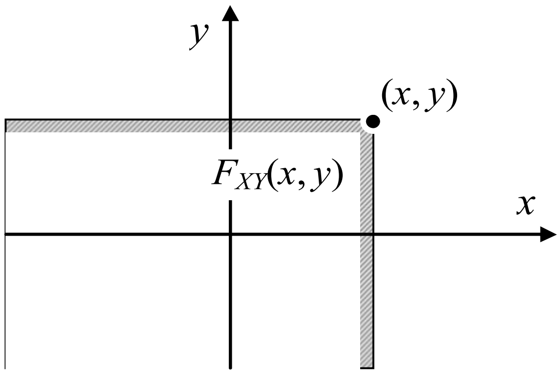



Рисунок 5 – Иллюстрация вероятностного смысла
функции распределения двумерной случайной величины

Функция распределения двумерной случайной величины $(X,\ Y)$ обладает следующими свойствами (рисунок 5).

**Свойство 1.** $F_{XY}(x,y)\geq 0$, т. е. функция распределения двумерной случайной величины $(X,Y)$ – неотрицательная функция.

**Свойство 2.** Если $x_1<x_2$, то $F_{XY}(x_1,y_1)\leq F_{XY}(x_2,y_1)$; если $y_1<y_2$, то $F_{XY}(x_1,y_1)\leq F_{XY}(x_1,y_2)$.

Таким образом, функция $F_{XY}(x,y)$ – неубывающая функция каждого аргумента при условии, что другие аргументы фиксированы.

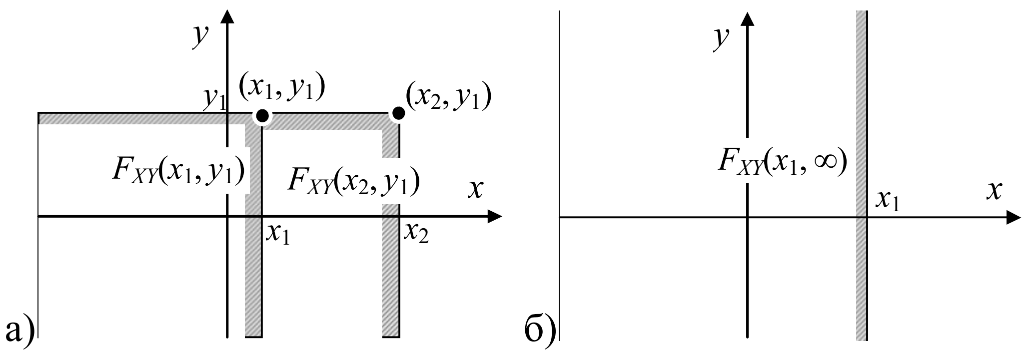



Рисунок 6 – Иллюстрация свойств
функции распределения двумерной случайной величины

**Свойство 3.** $F_{XY}(x,+\infty)=F_X(x)$; $F_{XY}(+\infty,y)=F_Y(y)$.

Таким образом, если один из аргументов функции распределения двумерной случайной величины $(X,\ Y)$ равен $+\infty$ (см. рисунок 6, б), то $F_{XY}(x,y)$ становится равной функции распределения одномерной случайной величины, соответствующей другому аргументу.

**Свойство 4.** $F_{XY}(-\infty, y) = 0$; $F_{XY}(x, -\infty) = 0$.

Таким образом, если хоть один из аргументов функции $F_{XY}(x, y)$ равен $-\infty$, то $F_{XY}(x, y) = 0$.

**Свойство 5.** $F_{XY}(+\infty, +\infty) = 1$

Таким образом, если все аргументы функции $F_{XY}(x, y)$ равны $+\infty$, то $F_{XY}(x, y) = 1$.

**Свойство 6.** По каждому из аргументов функция $F_{XY}(x, y)$ непрерывна слева.

Таким образом,

$$F_{XY}(x-0, y) = F_{XY}(x, y); \; F_{XY}(x, y-0) = F_{XY}(x, y).$$

**Замечание 1** – Функция распределения двумерной случайной величины представляет собой поверхность в пространстве. Причем в точке $(-\infty; -\infty)$ она равна нулю, а в точке $(+\infty; +\infty)$ – равна единице.

**Замечание 2** – Функция распределения дискретной двумерной случайной величины – разрывная ступенчатая функция. Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины непрерывна на всей числовой оси.

## 3.3 Функция плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины

Функция распределения $F_{XY}(x, y)$ – наиболее универсальная форма закона распределения многомерных случайных величин как дискретных, так непрерывных и смешанных. Кроме этого, закон распределения непрерывных многомерных случайных величин может быть задан с помощью функции плотности распределения.

Двумерная случайная величина называется непрерывной, если ее функция распределения $F_{XY}(x, y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y}$.

Аналогично тому, как была определена функция плотности распределения одномерной случайной величины, определим функцию плотности распределения $F_{XY}(x,y)$ непрерывной двумерной случайной величины как предел отношения вероятности попадания значения случайной величины $(X,\ Y)$ в элементарный прямоугольник, примыкающий к точке $(x,y)$, к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю:

$$f_{XY}(x,y) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{P(\{x < X < x+\Delta x\} \cap \{y < Y < y+\Delta y\})}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$

$$= \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}. \qquad (3.3.1)$$

При этом данный предел есть не что иное, как вторая смешанная производная функции распределения двумерной случайной величины $(X,\ Y)$.

Функция плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины $(X,\ Y)$ обладает следующими свойствами.

**Свойство 1.** $f_{XY}(x,y) \ge 0$, т. е. функция плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины $(X,\ Y)$ – неотрицательная функция.

**Свойство 2.** $P(\{x_1 \le X < x_2\} \cap \{y_1 \le Y < y_2\}) = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x,y)dxdy$.

Таким образом, вероятность попадания непрерывной двумерной случайной величины в произвольный прямоугольник, ограниченный точками $(x_1, y_1)$, $(x_1, y_2)$, $(x_2, y_1)$ и $(x_2, y_2)$, определяется двойным интегралом функции плотности распределения $f_{XY}(x,y)$ по каждой из переменных на интервалах $(x_1, y_2)$ и $(x_2, y_1)$ соответственно.

**Свойство 3.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$.

**Свойство 4.** $\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)dxdy = F_{\xi\eta}(x,y)$.

**Свойство 5.** $P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = 0$.

Таким образом, вероятность того, что непрерывная двумерная случайная величина $(X,\ Y)$ попадёт в точку $(x,y)$, равна нулю.

## 3.4 Понятие независимости случайных величин

При рассмотрении нескольких случайных величин (компонентов многомерной случайной величины) часто встречается задача установления факта зависимости величин. Например, влияет ли величина $X$ – «масса поезда» – на величину $Y$ – «расход топлива локомотивом».

Независимыми называются случайные величины, закон распределения каждой из которых не зависит (не изменяется) от того, какое значение приняла другая случайная величина.

Зная совместный закон распределения многомерной случайной величины (в частности $F_{XY}(x,y)$), можно найти законы распределения ее компонентов. Однако совместный закон распределения многомерной случайной величины можно определить через законы распределения компонентов (т. е. одномерных случайных величин), только если эти компоненты независимы.

Рассмотрим определение функции распределения двумерной случайной величины (3.2.1)

$$F_{XY}(x,y) = P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}).$$

Если величины $X$ и $Y$ независимы, то независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$. Следовательно, по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$F_{XY}(x,y) = P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}) = P(X < x)P(Y < y) = F_X(x)F_Y(y),$$

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y). \qquad (3.4.1)$$

Тождество (3.4.1) является необходимым и достаточным условием независимости двух случайных величин и называется теоремой умножения функций распределения независимых случайных величин.

Если $X$ и $Y$ – непрерывные независимые случайные величины, то, дифференцируя левую и правую части равенства (3.4.1) по $x$ и по $y$, получим

$$\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}.$$

Учитывая определения функции плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины (3.3.1) и функции плотности распределения непрерывной одномерной величины, получаем равенство, называемое теоремой умножения функций плотности распределения независимых величин (необходимое и достаточное условие независимости непрерывных случайных величин):

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)\,. \tag{3.4.2}$$

Если компоненты двумерной случайной величины ($X$, $Y$) зависимы, то для нахождения совместного закона распределения недостаточно знать законы распределения компонентов: требуется знать так называемый условный закон распределения одной из них.

Условным законом распределения величины $X$ называется закон ее распределения, вычисленный в предположении, что другая случайная величина $Y$ приняла определенное значение.

Функция распределения $F_{XY}(x, y)$ системы зависимых случайных величин может быть записана в виде, называемом теоремой умножения функций распределения величин:

$$\begin{gathered} F_{XY}(x, y) = P(\{X < x\} \cap \{Y < y\}) = \\ = P(X < x) P(Y < y \mid X < x) = F_X(x) F_Y(y \mid X < x), \end{gathered} \tag{3.4.3}$$

где $F_Y(y \mid X < x) = P(Y < y \mid X < x)$ – условная функция распределения величины $Y$ при условии наступления события $\{X < x\}$.

На практике чаще используют другую форму условного закона распределения $F_Y(y \mid X = x)$ или $f_Y(y \mid X = x)$, т. е. когда величина $X$ принимает фиксированное значение $x$. Тем более, что для непрерывных случайных величин справедлива следующая теорема умножения плотностей:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y \mid X = x), \tag{3.4.5}$$

т. е. функция плотности распределения непрерывной двумерной величины равна произведению функции плотности распределения одной из них на условную плотность распределения другой при заданном значении первой.

## 3.5 Числовые характеристики двумерной случайной величины

Случайные величины полностью характеризуются законами распределения, но часто достаточным бывает знать лишь некоторые характерные значения, которые может принимать случайная величина, т.е. ее числовые характеристики. Для описания многомерных случайных величин используются числовые характеристики ее составляющих, а также параметры, характеризующие зависимость между компонентами многомерной величины. Одна из таких характеристик – корреляционный момент (ковариация).

Корреляционным моментом $\mu_{XY}$ двух случайных величин $X$ и $Y$ называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий:

$$\mu_{XY} = M[(X - M[X])(Y - M[Y])]. \tag{3.5.1}$$

Корреляционный момент имеет размерность, равную произведению размерностей величин $X$ и $Y$. Часто пользуются безразмерной характеристикой – коэффициентом корреляции случайных величин, который определяется по формуле

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma[X]\sigma[Y]}. \tag{3.5.2}$$

Коэффициент корреляции может принимать значения из отрезка $[-1;1]$. Корреляционный момент и коэффициент корреляции характеризуют степень линейной зависимости между двумя величинами. Нулевое значение данных характеристик указывает на отсутствие линейной зависимости между исследуемыми величинами (при этом может существовать нелинейная зависимость). Равенство коэффициента корреляции $r_{XY}$ единице указывает на наличие положительной линейной функциональной зависимости между величинами $X$ и $Y$ (с увеличением $X$ величина $Y$ также увеличивается). Если же $r_{XY} = -1$, то между величинами $X$ и $Y$ существует отрицательная (с увеличением X величина $Y$ уменьшается) линейная функциональная зависимость. Промежуточные значения коэффициента корреляции ($r_{XY} \in (-1;\ 0)$ или $r_{XY} \in (0;\ 1)$) указывают на тенденцию к наличию линейной зависимости между величинами $X$ и $Y$.

**Пример 17**

Рассмотрим систему двух дискретных случайных величин $(X,\ Y)$, где случайная величина $X$ – число поездов (в сутки), задержанных станцией *А*, случайная величина $Y$ – число поездов (в сутки), задержанных станцией *Б*. Известна матрица распределения системы случайных величин $(X,\ Y)$ (таблица 4).

*Таблица 4* – **Матрица распределения двумерной случайной величины** $(X,\ Y)$

| $(X,\ Y)$ | $Y=0$ | $Y=1$ | $Y=2$ |
|---|---|---|---|
| $X=0$ | 0,4 | 0,05 | 0,05 |
| $X=1$ | 0,2 | 0,02 | 0,03 |
| $X=2$ | 0,05 | 0,2 | 0 |

Требуется: 1) найти законы распределения случайных величин $X$ и $Y$; 2) вычислить числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайных величин $X$ и $Y$, математическое ожидание произведения $XY$, корреляционный момент $\mu_{XY}$ и коэффициент корреляции $r_{XY}$); 3) выяснить, являются ли случайные величины $X$ и $Y$ зависимыми.

Решение. 1) Найдём законы распределения случайных величин.

а) Вероятности значений случайной величины $X$ найдём по формуле $P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{3} p_{ij},\ i=\overline{1,3}$;

$P(X=0)=0,4+0,05+0,05=0,5$;

$P(X=1)=0,2+0,02+0,03=0,25$;

$P(X=2)=0,05+0,2+0=0,25$.

Следовательно, ряд распределения случайной величины $X$ можем записать в виде таблицы 5:

*Таблица 5* – **Матрица распределения случайной величины X**

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0,5 | 0,25 | 0,25 |

б) Вероятности значений случайной величины $Y$ найдём по формуле

$P(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{3} p_{ij},\ j=\overline{1,3}$;

$P(Y=0)=0,4+0,2+0,05=0,65$;

$P(Y=1)=0,05+0,02+0,02=0,27$;

$P(Y=2)=0,05+0,03+0=0,08$.

Следовательно, ряд распределения случайной величины $Y$ можем записать в виде таблицы 6.

*Таблица 6 –* **Матрица распределения случайной величины** $Y$

| $y_j$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(Y = y_i)$ | 0,65 | 0,27 | 0,08 |

2) Вычислим числовые характеристики:

а) вычислим математическое ожидание случайной величины $X$, используя ряд распределения из таблицы 5:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 0\cdot 0,5 + 1\cdot 0,25 + 2\cdot 0,25 = 0,75 \text{ поездов/сут;}$$

б) вычислим математическое ожидание случайной величины $Y$, используя ряд распределения из таблицы 6:

$$M[Y] = \sum_{j=1}^{3} y_j p_j = 0\cdot 0,65 + 1\cdot 0,27 + 2\cdot 0,08 = 0,43 \text{ поездов/сут;}$$

в) вычислим дисперсию случайной величины $X$, используя ряд распределения из таблицы 5:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - (M[X])^2 = 0^2\cdot 0,5 + 1^2\cdot 0,25 + 2^2\cdot 0,25 - -(0,75)^2 = 0,6875$$

$$(\text{поездов/сут})^2;$$

г) вычислим дисперсию случайной величины $Y$, используя ряд распределения из таблицы 6:

$$D[Y] = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 p_j - (M[Y])^2 = 0^2\cdot 0,65 + 1^2\cdot 0,27 + 2^2\cdot 0,08 - -(0,43)^2 = 0,675$$

$$(\text{поездов/сут})^2;$$

д) средние квадратические отклонения случайных величин $X$ и $Y$:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0,6875} \approx 0,829 \text{ поездов/сут;}$$

$$\sigma[Y] = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{0,675} \approx 0,822 \text{ поездов/сут;}$$

е) вычислим математическое ожидание произведения случайных величин $\xi$ и $\eta$, пользуясь заданной матрицей распределения:

$$M[X\,Y] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} = 0\cdot 0\cdot 0,4 + 0\cdot 1\cdot 0,05 + 0\cdot 2\cdot 0,05 +$$
$$+ 1\cdot 0\cdot 0,2 + 1\cdot 1\cdot 0,02 + 1\cdot 2\cdot 0,03 + 2\cdot 0\cdot 0,05 + 2\cdot 1\cdot 0,2 +$$
$$+ 2\cdot 2\cdot 0 = 0,48 \ \ (\text{поездов/сут})^2;$$

ж) корреляционный момент двух случайных величин $X$ и $Y$

$$\mu_{XY} = M[XY] - M[X]M[Y],$$

следовательно, $\mu_{XY} = 0,48 - 0,75 \cdot 0,43 = 0,1575$ (поездов/сут)$^2$;

з) коэффициент корреляции двух случайных величин $X$ и $Y$

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma[X]\sigma[Y]} = \frac{0,1575}{0,829 \cdot 0,822} \approx 0,231.$$

3) Поскольку коэффициент корреляции $r_{XY} \neq 0$, то случайные величины $X$ и $Y$ зависимы.

Наличие зависимости между случайными величинами $X$ и $Y$ можно проверить и на основании определения независимости: если $P(X = x_i,\ Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$, то случайные величины $X$ и $Y$ независимы. Если данное равенство нарушается, то случайные величины $X$ и $Y$ зависимы.

Проверим выполнение нескольких неравенств для заданной матрицы распределения:

$P(X = 0,\ Y = 0) = 0,43;\quad P(X = 0) = 0,5;\quad P(Y = 0) = 0,65;$
$0,43 \neq 0,5 \cdot 0,65;$

$P(X = 0,\ Y = 1) = 0,05;\quad P(X = 0) = 0,5;\quad P(Y = 1) = 0,27;$
$0,05 \neq 0,5 \cdot 0,27;$

$P(X = 0,\ Y = 2) = 0,05;\quad P(X = 0) = 0,5;\quad P(Y = 2) = 0,08;$
$0,05 \neq 0,5 \cdot 0,08;$

$P(X = 1,\ Y = 0) = 0,2;\quad P(X = 1) = 0,25;\quad P(Y = 0) = 0,65;$
$0,2 \neq 0,25 \cdot 0,65;$ и т. д.

Выполненные вычисления подтверждают наличие зависимости между случайными величинами $X$ и $Y$.

**Вывод.** Среднее число поездов в сутки, задержанных станцией $A$, равно 0,75; среднее число поездов в сутки, задержанных станцией $B$, равно 0,43; корреляционный момент, характеризующий разброс точек $(X,\ Y)$ вокруг точки $(M[X],\ M[Y])$, равен 0,1575; коэффициент корреляции равен 0,231, что говорит об очень слабой линейной зависимости между случайными величинами $X$ и $Y$.

# 4 Математическая статистика

## 4.1. Выборочный метод. Эмпирическая функция распределения. Статистическое оценивание параметров распределения методом моментов

Предположим, что для изучения некоторого количественного признака $X$ из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{4.1.1}$$

**Эмпирической** (или выборочной) функцией распределения называется функция действительного переменного

$$F^*(x) = \frac{\nu(x)}{n}, \tag{4.1.2}$$

где $\nu(x)$ – число элементов выборки, меньших $x$.

Если признак $X$ имеет непрерывное распределение, то по выборке (4.1.1) строят **интервальный статистический ряд**, разбивая интервал, содержащий все элементы выборки (4.1.1) на ряд частичных интервалов шириной $h$ и, подсчитывая $n_i$ – частоту элементов выборки, попавших $i$-й интервал

*Таблица 7* – **Интервальный статистический ряд**

| Интервалы | $[\alpha_1, \alpha_2)$ | $[\alpha_2, \alpha_3)$ | $\ldots$ | $[\alpha_r, \alpha_{r+1})$ |
|---|---|---|---|---|
| Частоты | $n_1$ | $n2$ | $\ldots$ | $n_r$ |

где $\alpha_{i+1} - \alpha_i = h, \quad i = 1, 2, \ldots, r; \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = n$

**Гистограммой** интервального статистического ряда (таблица 7) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, построенных в прямоугольной системе координат так, что их основаниями служат интервалы $[\alpha_i, \alpha_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, отложенные на оси абсцисс, а высоты равны $r_i/(nh)$ соответственно $i$-му основанию $i = 1, 2, \ldots, r$ (рисунок 6).

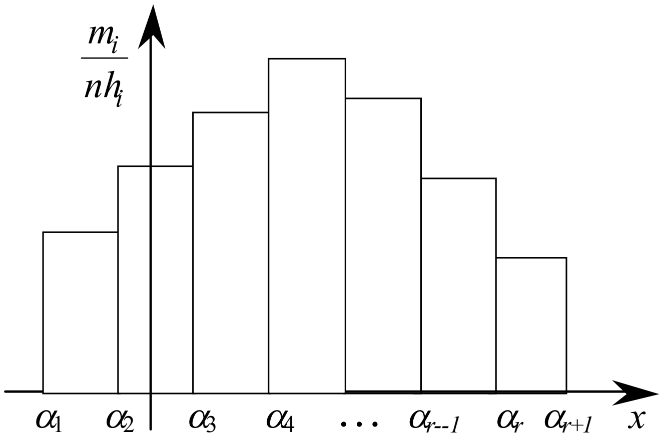



Рисунок 6

Кривая l, проходящая через середины ступеней гистограммы дает приближенное представление о кривой распределения признака $X$ и называется эмпирической кривой распределения. Площадь гистограммы равна единице. Часто из некоторых предпосылок бывает известен тип закона распределения признака $X$, но неизвестны параметры этого распределения. Например, известно, что плотность распределения признака $X$ задана функцией $f(x,\theta_1,\ldots,\theta_k)\theta$ , где $\theta_1,\ldots,\theta_k\theta$ – неизвестные параметры. Ставится задача нахождения статистических оценок $\theta_1^*,\theta_2^*,\ldots,\theta_r^*\theta$ параметров $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k\theta$ по выборке (4.1.1) наблюдений над $X$. Таким образом, оценки – функции от выборочных значений.

Одним из методов построения таких оценок является **метод моментов**, который основывается на близости теоретических и эмпирических моментов. Он состоит в следующем:

По формуле плотности распределения $f(x,\theta_1,\ldots,\theta_k)$ находим $k$ первых начальных теоретических моментов признака X

$$\mu_m = M[X^m] \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x,\theta_1,\ldots,\theta_k)dx, \qquad m \quad 1,2,\ldots,k, \tag{4.1.3}$$

затем по выборке (4.1.1) вычисляем соответственные выборочные моменты

$$\mu_m^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} x_i^m, \quad m = 1,2,\ldots,k, \tag{4.1.4}$$

Приравнивая каждый теоретический момент соответствующему выборочному, получаем систему из $k$ уравнений

$$\mu_m(\theta_1,\ldots,\theta_k) = \mu_n^*, \qquad m = 1,2,\ldots,k, \tag{4.1.5}$$

с неизвестными $\theta_1,\ldots,\theta_k$ .

Решение $\theta_1^*,\dots,\theta_k^*$ системы (4.1.5), зависящее от элементов выборки (4.1.1), принимают в качестве статистических оценок параметров $\theta_1,\dots,\theta_k$.

Величина $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (4.1.6)$$

называется <u>выборочной средней</u> и служит статистической оценкой для *M[X]*.

Величина $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (4.1.7)$$

называется несмещенной выборочной дисперсией и служит статистической оценкой для *D[X]*.

$\bar{x}$ и $S^2$ – точечные оценки параметров *M[X]* и *D[X]*.

В математической статистике используются еще и интервальные оценки. <u>Доверительным</u> называют интервал, концы которого зависят от выборочных значений и которые с заданной <u>доверительной вероятностью</u> покрывает оцениваемый параметр.

Предположим, что выборка (4.1.1) взята из нормально распределенной генеральной совокупности признака *X* с неизвестными параметрами а = *M[X]* и $\sigma^2 = D[X]$.

Связь между доверительным интервалом, покрывающим параметр а, с доверительной вероятностью $1-\varepsilon$ задается при этих условиях формулой

$$P\left\{\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1-\varepsilon\,, \qquad (4.1.8)$$

где *t* – критическая точка распределения Стьюдента с *n*-1 степенью свободы, соответствующая уровню значимости $\frac{\varepsilon}{2}$. Для построения доверительного интервала, покрывающего параметр $\sigma^2$ с доверительной вероятностью $1-\varepsilon$, используется другая формула

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\gamma_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\gamma_1}\right\} = 1-\varepsilon \qquad (4.1.9)$$

где числа $\gamma_1$ и $\gamma_2$ находятся из уравнений

$$\int_{\gamma_1}^{+\infty} k_{n-1}(x)dx = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.1.10)$$

$$\int_{\gamma_2}^{+\infty} k_{n-1}(x)dx = 1-\frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.1.11)$$

по таблицам $\chi^2$ – распределения с ($n$-1) степенью свободы, то есть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ – критические точки $\chi^2$ – распределения с ($n$ – 1) соответствующие уровням значимости $1-\frac{\varepsilon}{2}$ и $\frac{\varepsilon}{2}$.

**Пример 18**

Приведенные ниже данные о ценах на 100 видов товаров ( в у. е.) записаны в случайном порядке

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 126 | 93 | 114 | 126 | 81 | 140 | 129 | 114 | 138 | 140 |
| 151 | 171 | 152 | 139 | 97 | 163 | 117 | 158 | 125 | 129 |
| 116 | 129 | 108 | 124 | 105 | 137 | 106 | 140 | 137 | 116 |
| 120 | 122 | 145 | 136 | 169 | 122 | 232 | 97 | 123 | 112 |
| 144 | 101 | 148 | 126 | 124 | 125 | 117 | 142 | 133 | 119 |
| 125 | 170 | 138 | 100 | 80 | 124 | 108 | 90 | 83 | 86 |
| 163 | 109 | 100 | 125 | 160 | 138 | 144 | 137 | 111 | 128 |
| 87 | 111 | 130 | 99 | 109 | 165 | 56 | 152 | 115 | 104 |
| 111 | 107 | 131 | 124 | 162 | 88 | 94 | 92 | 132 | 125 |
| 112 | 150 | 102 | 82 | 113 | 158 | 107 | 134 | 157 | 101 |

Используя эти данные, необходимо:

1) получить выборку, выбрав 20 значений,

2) записать эмпирическую функцию распределения;

3) построить интервальный вариационный ряд с шириной интервала 20 у.е;

4) построить гистограмму и эмпирическую кривую распределения;

5) предполагая, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение с плотностью распределения $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ найти методом моментов оценки а и $\sigma^2$.

**Решение.**

1) Произведем выборку. Получаем 125, 170, 151, 195, 173, 117, 190, 133, 102, 151, 94, 94, 114, 153, 109, 148, 101, 139, 110, 144.

2) Для построения $F^*(x)$ запишем элементы выборки в порядке возрастания: 94, 94, 101, 102, 109, 110, 114, 117, 125, 133, 139, 144, 148, 151, 151, 153, 170, 173, 190, 196.

$$F^*(x) = \frac{\nu(x)}{n} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 94 \\ 2/20, & \text{если} \quad 94 < x \le 101 \\ 3/20, & \text{если} \quad 101 < x \le 102 \\ 4/20, & \text{если} \quad 102 < x \le 109 \\ 5/20, & \text{если} \quad 109 < x \le 110 \\ 6/20, & \text{если} \quad 110 < x \le 114 \\ 7/20, & \text{если} \quad 114 < x \le 117 \\ 8/20, & \text{если} \quad 117 < x \le 125 \\ 9/20, & \text{если} \quad 125 < x \le 133 \\ 10/20, & \text{если} \quad 133 < x \le 139 \\ 11/20, & \text{если} \quad 139 < x \le 144 \\ 12/20, & \text{если} \quad 144 < x \le 148 \\ 13/20, & \text{если} \quad 148 < x \le 151 \\ 15/20, & \text{если} \quad 151 < x \le 153 \\ 16/20, & \text{если} \quad 153 < x \le 170 \\ 17/20, & \text{если} \quad 170 < x \le 173 \\ 18/20, & \text{если} \quad 173 < x \le 190 \\ 19/20, & \text{если} \quad 190 < x \le 196 \\ 1, & \text{если} \quad 196 < x \end{cases}$$

3). Составляем вариационный ряд с шириной интервала $h = 20$ (у.е)

| Интер-валы | [90,110) | [110,130) | [130,150) | [150,170) | [170,190) | [190,210] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Часто-ты | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 2 |

$$\sum_{i=1}^{6} n_i = 5 + 4 + 3 + 2 + 2 = 20.$$

4). Строим гистограмму и эмпирическую (выборочную) кривую распределения (рисунок 7), откладывая на оси абсцисс интервалы, а по оси координат $n_i/(nh)$:

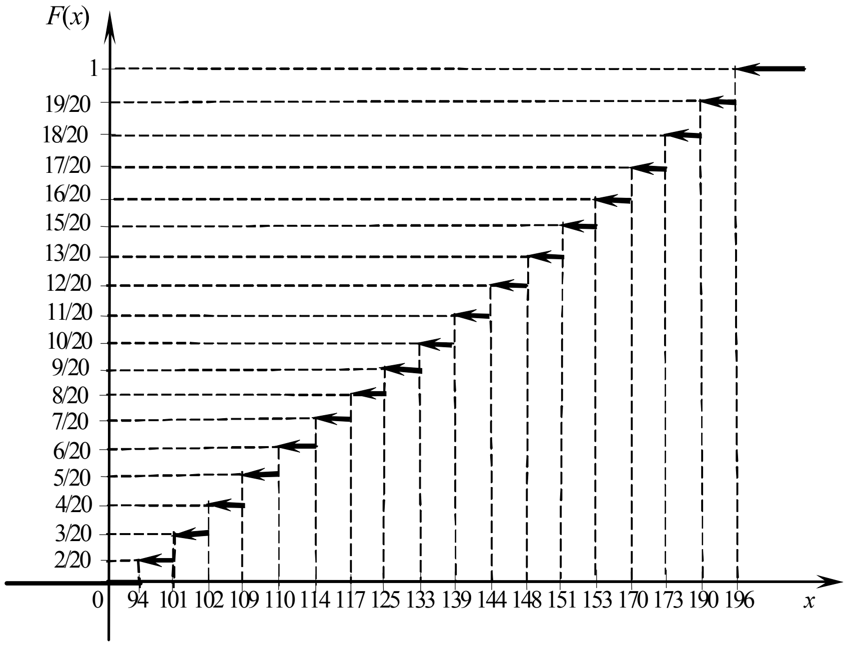



Рисунок 7

5). При изучении нормального закона доказывается, что в плотности $f(x,a,\sigma^2)$ параметр $a$ есть математическое ожидание, а параметр $\sigma^2$ – дисперсия:

$a = MX = \mu_1$;

$\sigma^2 = DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2 = \mu_2 - \mu_1^2$.

Приравнивая теоретические моменты $\mu_1$ и $\mu_2$ выборочным $\mu_1^*$ и $\mu_2^*$, получаем:

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \tag{4.1.12}$$

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \tag{4.1.13}$$

Используя обозначение (4.1.6), имеем

$$a^* = \overline{x} \tag{4.1.14}$$

Преобразовывая (4.1.9), находим

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2(\overline{x})^2 + (\overline{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=n}^{n} x_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} x_i \cdot \overline{x} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 .$$

Итак, $$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad . \qquad (4.1.15)$$

Полученная нами методом моментов оценка (4.1.15) называется смещенной выборочной дисперсией.

По выборке вычислим оценки (4.1.14) и (4.1.15):

$$\bar{x} = \frac{1}{20}-(125+170+151+196+173+117+190+133+102+151+$$

$$+94+94+114+153+109+148+101+139+110+144) =$$

$$= \frac{1}{20}\cdot 2714 = 135{,}7$$

$$(\sigma^2)^* = -\frac{1}{20}(10{,}7^2 + 34{,}3^2 + 15{,}3^2 + 60{,}3^2 37{,}3^2 + 18{,}7^2 + 54{,}3^2 +$$

$$+2{,}7 + 33{,}7^2 + 15{,}3^2 + 41{,}7^2 + 41{,}7^2 + 21{,}7^2 + 17{,}3^2 + 24{,}7^2 + 12{,}3^2 +$$

$$+34{,}7^2 + 3{,}3^2 + 45{,}7^2 + 8{,}3^2) = \frac{1}{20}\cdot 19634{,}45 = 961{,}72 \approx 981{,}7$$

6) По формуле (4.1.8):

$$P\left\{\bar{x} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \varepsilon \;.$$

По условию задачи $n = 20; \quad 1 - \varepsilon = 0{,}95$.

В 5) мы вычислили $\bar{x} = 135{,}7$. Для вычисления несмещенной выборочной дисперсии $S^2$, сравним формулы (4.1.13) и (4.1.15). Видим, что

$$S^2 = \frac{n}{n-1}(\sigma^2)^* \;.$$

Подставляя $(\sigma^2)^*$ в эту формулу, имеем

$$S^2 = \frac{20}{19}\cdot 981{,}7 \approx 1033{,}4 \;.$$

Отсюда $S \approx 32{,}14$.

По таблицам распределения Стьюдента с $n$-1=19 степенью свободы находим t при доверительной вероятности 0,95.

$$t = 2{,}0930 \approx 2{,}1 \;.$$

Выписываем из (4.1.8) доверительный интервал:

$$J_a = \left(135{,}7 - 2{,}1\cdot\frac{32{,}14}{\sqrt{20}} \quad 135{,}7 + 2{,}1\cdot\frac{32{,}14}{\sqrt{20}}\right) = (140{,}71;\ 150{,}69),$$

покрывающий параметр $a$ с вероятностью 0,95.

По формуле (4.1.9)

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\gamma_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\gamma_2}\right\} = 1 - \varepsilon \;.$$

$\gamma_1$ и $\gamma_2$ находим по таблице распределения $X^2$ с $n$-1=19 степенью свободы, используя формулы (4.1.10) и (4.1.11) с $\varepsilon = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 : \gamma_1 = 8{,}907 \approx 8{,}9 \quad \gamma_2 = (32{,}852 \approx 32{,}8$.

Выписываем доверительный интервал

$$J_{\sigma^2} = \left( \frac{19\ 1033{,}4}{32{,}8}; \qquad \frac{19\ 1033{,}4}{} 8{,}9 \right) = (598{,}6;\ 2206{,}1),$$

покрывающий параметр $\sigma^2$ с вероятностью 0,95.

## 4.2 Проверка статистических гипотез

При изучении генеральной совокупности часто необходимо знать закон ее распределения. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид, выдвигают гипотезу: генеральная совокупность имеет функцию распределения $F_0(x)$. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.

Возможен случай, когда закон распределения генеральной совокупности известен, а его параметры неизвестны. Если имеются основания предположить, что неизвестный параметр $\theta$ равен определенному значению $\theta_0$, выдвигают гипотезу: $\theta = \theta_0$. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагаемой величине неизвестного параметра известного распределения.

Наряду с выдвинутой гипотезой обычно рассматривают противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу $H_0$. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу $H_1$, которая противоречит нулевой гипотезе. Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание $a$ нормального распределения равно 10, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении того, что $a \neq 10$. Коротко это записывается так: $H_0 : a = 10, \quad H_1 : a \neq 10.$ Различают гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.

**Простой** называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, $H_0 : a = 10$ – простая гипотеза.

**Сложной** называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, $H_0 : F(x) \in \quad \in \{F_0(x) \mid F_0(a) = 0,\ F_0(b) = 1\}$. Эта гипотеза состоит в том, что ф.р.

генеральной совокупности принадлежит множеству ф.р. $F_0(x)$, таких, что $F_0(a)=0$, а $F_0(b)=1$.

Выдвинутая нулевая гипотеза может быть правильной или неправильной. В итоге статистической проверки нулевой гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т.е. могут быть допущены ошибки двойного рода.

**Ошибка первого рода** состоит в том, что нулевая гипотеза будет отвергнута, в то время как в действительности она правильная.

**Ошибка второго рода** состоит в том, что нулевая гипотеза будет принята, в то время как в действительности она неправильная.

Для проверки нулевой гипотезы используют специально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно. Эту величину обозначают различными буквами в зависимости от закона ее распределения и называют **статистическим критерием** или просто критерием.

После выбора определенного критерия множество всех возможных его значений разбивают на два непересекающихся подмножества; одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другое – при которых она принимается.

**Критической областью** называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Основной принцип проверки статистических гипотез таков: по данным выборки вычисляется значение критерия, которое называется **наблюдаемым**; если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, нулевую гипотезу отвергают; в противном случае нулевую гипотезу принимают.

### 4.2.1 Критерий $\chi^2$ Пирсона

На практике часто возникает следующая задача. Пусть в результате какого-либо эксперимента получена выборка

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{4.2.1.1}$$

объема *n* с функцией распределения $F_X(x)=P\{x_i<x\}$. Нас интересует гипотеза, состоящая в том, что функция распределения $F_X(x)$ совпадает с некоторой фиксированной ф.р. $F_0(x)$. Задача проверки статистической гипотезы $H_0$: $F_X(x)=F_0(x)$ состоит в том, чтобы решить согласуются ли с ней значения $x_i$ выборки (4.2.1.1). Для решения этой задачи

поступим следующим образом. Разделим точками $-\infty = z_0 \quad z_1 < z_2 < \ldots < z_{r-1} \quad z_r = +\infty$ всю прямую на $r$ интервалов $\left[z_{k-1},\ z_k\ \right)$.

Обозначим $P_k = F_0(z_k) - F_0(z_{k-1}) = P\{z_{k-1} \le x_i < z_k\}$ – вероятность попадания $x_i$ в интервал $[z_{k-1}, z_k[$ в случае, когда наша гипотеза справедлива. По выборке (4.2.1.1) определим числа $v_k,\ \ k = 1,2,\ldots,r$, где $v_k$ - число элементов $x$ выборки (4.2.1.1), попавших в интервал $[z_{k-1}, z_k)$. Таким образом, мы свели задачу к более простой. Имеется $n$ независимых испытаний с r исходами. Вероятность $k$-го исхода равна $p_k$. Набор вероятностей исходов $p_1, p_2, \ldots, p_r, \sum_{k=1}^{r} p_k = 1$, определяется первоначальной статистической гипотезой. Случайные величины $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\rho, \sum_{\kappa=1}^{r} \nu_\kappa = n,$ определяются по выборке (4.2.1.1).

Если значения $\nu_\kappa$ соответствует вероятностям $p_k$, то разности $-\dfrac{\nu_k}{n} - p_k$ должны быть малы. Таким образом, в качестве критерия проверки нулевой гипотезы примем случайную величину:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(\nu_\kappa - np_k)^2}{np_k}, \tag{4.2.1.2}$$

которую будем называть $\chi^2$ – статистикой Пирсона.

Справедливо следующее утверждение: при любом $x$>0 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\chi^2 < x\right\} = K_{r-1}(x)$, где $K_{r-1}(x)$ – функция распределения $\chi^2$ с $(r-1)$ степенью свободы.

Этот результат используется следующим образом. Зададимся каким-либо малым значением вероятности $\alpha$, которое будем называть **<u>уровнем значимости критерия</u>**. Заменим при больших $n$ предельное соотношение приближенным равенством $P\left\{\chi^2 < x\right\} \approx K_{r-1}(x)$. Выбирая $x - \chi^2_{kp.}$ таким, чтобы $K_{r-1}(\chi^2_{kp.}) = 1 - \alpha$, получаем, что в случае, когда проверяемая гипотеза справедлива, событие $\left\{\chi^2 \ge \chi^2_{kp.}\right\}$ может произойти лишь с малой вероятностью, которая приближенно равна $\alpha$. Обычно полагают $\alpha$=0,05 или $\alpha$=0,01 . Если гипотеза верна, то маловероятное событие $\left\{\chi^2 \ge \chi^2_{kp.}\right\}$ практически невозможно. Если оно произошло, то будем считать, что гипотеза неверна. Если же $\chi^2 < \chi^2_{kp.}$, то будем говорить, что выборочные данные не противоречат гипотезе $F_x(x) = F_o(x)$.

**Замечание 1** Если функция распределения $F_x(x,\theta_1,\ldots,\theta_m)$ элементов выборки зависит от неизвестных параметров $\theta_1,\ldots,\theta_m$, то эти параметры следует оценить по выборке с помощью методов минимума $\chi^2$ или максимума правдоподобности и в этом случае предельное распределение величины $\chi^2$ является $\chi^2$ – распределением, но уже с ($r$–$m$–1) степенями свободы.

**Замечание 2** Если $F_x(x,\theta_1,\ldots,\theta_m)$ имеет нормальное распределение, то параметры можно оценивать с помощью метода моментов.

Каждый интервал должен содержать не менее 5-6 выборочных значений; малочисленные интервалы следует объединять, суммируя частоты.

**Пример 19**

Получены следующие данные о размере мужской обуви, проданной магазином в течение дня

| Размер обуви, $x_i$ | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество проданных пар, $n_i$ | 1 | 4 | 14 | 37 | 35 | 20 | 8 | 3 |

Проверить гипотезу о том, что случайная величина $\chi$ – размер обуви мужчины, имеет нормальное распределение, предварительно оценив по выборке математическое ожидание и дисперсию.

**Решение.** Оценим сначала параметры распределения, используя метод моментов. Для этого найдем выборочные среднее и дисперсию.

$$\bar{x} = \frac{1}{122}\sum_{i=1}^{8} n_i x_i = 40{,}705; \quad (\sigma^2)^* = 1{,}749, \quad \sigma^* = \sqrt{(\sigma^2)^*} = 1{,}322$$

Принимаем эти величины соответственно за математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\chi$. Таким образом, нам нужно проверить гипотезу $H_0: F_X(x) = F_0(x)$, где $F_0(x)$ – функция нормального распределения с параметрами (40,705; 1,749). Для этого вычислим величину $\chi^2$. Разобьем множество значений случайной величины $X$ на 5 интервалов: (–∞; 39,5), [ 39,5; 40,5), [40,5; 41,5), [ 41,5; 42,5), [42,5; +∞) и подсчитаем число выборочных значений, попадающих в каждый интервал: $\nu_1 = 19$, $\nu_2 = 37$, $\nu_3 = 35$, $\nu_4 = 20$, $\nu_5 = II$.

Далее вычисляем вероятности $p_i$ – попадания с.в. $X$ в $i$-й интервал. Принимая во внимание, что при справедливости гипотезы с.в. $X$ распределенная нормально с параметрами (40,705; 1,749), для вычисления вероятностей $p_i$, получим следующую формулу:

$p_i = P\{\alpha_i \le X < \beta_i\} = \Phi\left(\frac{\beta_i - 40{,}705}{1{,}322}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_i - 40{,}705}{1{,}322}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Используя приведенную выше формулу и таблицу значений функции Лапласа, получим:

$$p_1 = \Phi\left(\frac{39{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(-\infty) - \Phi(0{,}9115) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}3186 = 0{,}1814;$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{40{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) - \Phi\left(\frac{39{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) = \Phi(-0{,}155) -$$
$$- \Phi(-0{,}9115) = \Phi(0{,}9115) - \Phi(0{,}155) = 0{,}3186 - 0{,}0636 = 0{,}255;$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{41{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) - \Phi\left(\frac{40{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) = \Phi(0{,}6) + \Phi(0{,}155) = 0{,}2257 + 0{,}0636 = 0{,}2893;$$

$$P_4 = \Phi\left(\frac{42{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) - \Phi\left(\frac{41{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) = \Phi(1{,}36) - \Phi(0{,}6) = 0{,}4131 - 0{,}2257 = 0{,}1874;$$

$$P_5 = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{42{,}5 - 40{,}705}{1{,}322}\right) = 0{,}5 - \Phi(1{,}36) = 0{,}5 - 0{,}4131 = 0{,}0869$$

По формуле (4.2.1.2) вычисляем величину $\chi^2$:

$$\chi^2 = \frac{(19 - 122\ 0{,}1814)^2}{122\ 0{,}1814} + \frac{(11 - 122\ 0{,}255)^2}{122\ 0{,}255} + \frac{(35 - 122\ 0{,}2893)^2}{122\ 0{,}2893} +$$
$$+ \frac{(20 - 122\ 0{,}1874)^2}{122\ 0{,}1814} + \frac{(11 - 122\ 0{,}0869)^2}{122\ 0{,}0869} = 0{,}4429 + 1{,}1151 +$$
$$+ 0{,}0025 + 0{,}3585 + 0{,}0150 = 1{,}934$$

Зададим уровень значимости $\alpha$ =0,01. Принимая во внимание замечание 1, найдем критическую точку $\chi^2$ распределения, отвечающую уровню значимости $\alpha$ =0,01 и числу степеней свободы

$k$ =5 –1–2 =2, то есть $\chi^2_{kp} = \chi^2(0{,}01;2) = 9{,}2.$

Поскольку $\chi^2 < \chi^2_{kp}$, то можно считать, что выборочные данные не противоречат нашей гипотезе о нормальности распределения размера обуви мужчин.

## 4.3 Элементы теории корреляции. Линейная корреляция

При изучении влияния одних признаков явлений на другие из ряда признаков, характеризующих данное явление, выделяют два признака

– факториальный и результативный. Необходимо установить, какой из признаков является факториальным и какой результативным.

Пример. Себестоимость промышленной продукции отдельного предприятия зависит от многих факторов, в том числе от объема продукции на данном предприятии. Себестоимость продукции в этом случае выступает как результативный признак, а объем продукции как факториальный.

Одной из основных задач теории корреляции является выявление на основе экспериментальных данных того, как изменяется результативный признак в связи с изменением данного фактора. Эта задача решается нахождением уравнения связи. Под уравнением связи будем понимать функциональную зависимость между результативным и факториальным признаками. Применение той или иной функции в качестве уравнения связи разграничивает корреляцию на линейную, параболическую и др.

Рассмотрим уравнение связи для линейной зависимости от одного признака. Такое уравнение называют уравнением линейной регрессии. Выборочное уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$ имеет вид:

$$y-\overline{y}=r_B\frac{S_y}{S_x}(x-\overline{x}) \text{ , где}$$

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i;\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i;\quad S_x=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2};$$

$$S_y=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2};$$

а $r_B=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})/(S_xS_y)$ есть выборочный коэффициент корреляции.

При проведении корреляционного анализа прежде всего возникает вопрос о реальности связи, т.е. о том, является ли полученный из наблюдений коэффициент корреляции значимым и не объясняется ли получение его случайностями выборки. Таким образом, требуется проверить гипотезу $H_0: g=0$, где $g$ – коэффициент корреляции признаков $X$ и $Y$. В качестве критерия служит следующая случайная величина $D=r_B\sqrt{n}/(1-r_B^2)$. Если гипотеза $H_0$ верна, то случайная величина $D$ распределена нормально с параметрами (0,1). Следовательно, критическую область выбирают так, чтобы $P\{|D|\le t_\alpha\}=\alpha$, где $\alpha$ - уровень значимости, а $t_\alpha$ находят из уравнения $\Phi(t_\alpha)=\frac{1-2}{2}$ по таблицам функции Лапласа.

Если вычисленная по данным выборки величина $|D|\leq t_\alpha$, то гипотезу $H_0 : g=0$ отвергают. В противном случае гипотезу принимают.

**Пример 20**

Рассмотрим зависимость между размером предприятия по стоимости основных средств и себестоимостью единицы продукции. Факториальным признаком у нас является стоимость основных средств, а результативным себестоимость единицы продукции.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ (млн. руб.) | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 |
| $Y$ | 15 | 11 | 12 | 12 | 9 | 10 |

**Решение.** Найдем числовые характеристики случайных величин $X$, $Y$, найденные по выборке:

$$\bar{x}=\frac{1}{6}(0,5+1,5+2,5+3,5+4,5+5,5)=\frac{18}{6}=3;$$

$$\bar{y}=\frac{1}{6}(15+11+12+12+9+10)=\frac{69}{6}=11,5;$$

$$S_x\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=1,707\sqrt{\frac{6}{5}};\ S_y=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=1,892\sqrt{\frac{6}{5}}$$

Для вычисления выборочного коэффициента корреляции вычислим $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$, предварительно преобразовав ее:

$$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n-1}n\sum_{i=1}x_iy_i-\frac{n}{n-1}\bar{x}\,\bar{y}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{6}(x_i-3)(y_i-11,5)=\frac{1}{5}(0,5\cdot15+1,5\cdot11+2,5\cdot12+3,5\cdot12+$$

$$+4,5\cdot9+5,5\cdot10)-\frac{6}{5}\cdot3\cdot11,5=-2,583\cdot\frac{6}{5.}$$

Таким образом, выборочный коэффициент корреляции равен:

$$r_B = \frac{-2{,}583}{1{,}707 \cdot 1{,}892} \approx -0{,}79.$$

Следовательно, выборочное уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$ ,будет иметь вид:

$$y - 11{,}5 = -0{,}79\frac{1{,}892}{1{,}707}(ч - 3).$$

$$y = -0{,}869 \cdot 10 + 14{,}107 = 5{,}417.$$

Т.е. прогнозируемая стоимость будет равна 5,417.

Мы нашли выборочный коэффициент корреляции и на основании его строили уравнение линейной регрессии, т.е. уравнение связи.

Или окончательно

$$y = -0{,}869x + 14{,}107$$

Полученной зависимостью можно воспользоваться для определения ожидаемой себестоимости единицы изделия на предприятии со стоимостью основных фондов в 10 млн.руб.

Выясним вопрос о реальности связи, т.е. является ли полученный по наблюдениям коэффициент корреляции значимым? Следовательно, нам предстоит проверить гипотезу $H_0 : g = 0$.

Вычислим величину $D = \frac{-0{,}79\sqrt{6}}{1 - 0{,}79^2} \approx -5{,}1.$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$ по таблице функции Лапласа находим $t_{0,01} = 2{,}58$. Поскольку $|D| = 5{,}1 > 2{,}58$, то гипотезу $H_0 : g = 0$ следует отвергнуть. Таким образом, на основании экспериментальных данных коэффициент корреляции $X$ и $Y$ следует признать значимым.

# 5 Варианты заданий для контрольной работы

Номера задач, которые необходимо выполнить, определяются с помощью приведенной ниже таблицы. В первом столбце указан номер варианта контрольной работы, который соответствует двум последним цифрам шифра зачетной книжки студента. В последующих столбцах приведены номера задач, которые следует выбрать.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.1 | 2.1 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 02 | 1.2 | 2.2 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 03 | 1.30 | 2.3 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.3 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |
| 04 | 1.4 | 2.4 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 05 | 1.5 | 2.5 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 06 | 1.6 | 2.6 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 07 | 1.7 | 2.7 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.7 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 08 | 1.8 | 2.8 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.8 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 09 | 1.9 | 2.9 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.9 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 10 | 1.10 | 2.10 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.10 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 11 | 1.11 | 2.11 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.16 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 12 | 1.12 | 2.12 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.30 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 13 | 1.13 | 2.13 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 14 | 1.14 | 2.14 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 15 | 1.15 | 2.15 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.3 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |
| 16 | 1.16 | 2.16 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 17 | 1.17 | 2.17 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 18 | 1.18 | 2.18 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 19 | 1.19 | 2.19 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.7 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 20 | 1.20 | 2.20 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.8 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 21 | 1.21 | 2.21 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.9 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 22 | 1.22 | 2.22 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.10 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 23 | 1.23 | 2.23 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.16 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 24 | 1.24 | 2.24 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.30 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 25 | 1.25 | 2.25 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 26 | 1.26 | 2.26 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 27 | 1.27 | 2.27 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.3 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |
| 28 | 1.28 | 2.28 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 29 | 1.29 | 2.29 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 30 | 1.30 | 2.30 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 31 | 1.2 | 2.2 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.7 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 32 | 1.3 | 2.3 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.8 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 33 | 1.4 | 2.4 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.9 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 34 | 1.5 | 2.5 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.10 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 35 | 1.6 | 2.6 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.16 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 36 | 1.7 | 2.7 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.30 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 37 | 1.8 | 2.8 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 38 | 1.9 | 2.9 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 39 | 1.10 | 2.10 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.3 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |
| 40 | 1.11 | 2.11 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 41 | 1.12 | 2.12 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 42 | 1.13 | 2.13 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 43 | 1.14 | 2.14 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.7 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 44 | 1.15 | 2.15 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.8 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 45 | 1.16 | 2.16 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.9 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 46 | 1.17 | 2.1 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.10 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 47 | 1,18 | 2.2 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.16 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 48 | 1.19 | 2.3 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.30 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 49 | 1.20 | 2.4 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 50 | 1.21 | 2.5 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 51 | 1.22 | 2.6 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.3 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |
| 52 | 1.23 | 2.7 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 53 | 1.24 | 2.8 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 54 | 1.25 | 2.9 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 55 | 1.26 | 2.10 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.7 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 56 | 1.27 | 2.11 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.8 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 57 | 1.28 | 2.12 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.9 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 58 | 1.29 | 2.13 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.10 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 59 | 1.30 | 2.14 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.16 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 60 | 1.1 | 2.15 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.30 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 61 | 1.29 | 2.16 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 62 | 1.28 | 2.17 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 63 | 1.27 | 2.18 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.3 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |
| 64 | 1.26 | 2.19 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 65 | 1.25 | 2.10 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 66 | 1.24 | 2.11 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 67 | 1.23 | 2.12 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.7 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 68 | 1.22 | 2.13 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.8 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 69 | 1.21 | 2.14 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.9 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 70 | 1.20 | 2.15 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.10 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 71 | 1.19 | 2.16 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.16 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 72 | 1.18 | 2.17 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.30 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 73 | 1.17 | 2.18 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.1 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 74 | 1.16 | 2.19 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.2 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 75 | 1.15 | 2.10 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.3 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 76 | 1.14 | 2.11 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.4 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 77 | 1.13 | 2.12 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.5 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 78 | 1.12 | 2.13 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.6 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 79 | 1.11 | 2.14 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.7 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 80 | 1.10 | 2.15 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.8 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 81 | 1.9 | 2.16 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.9 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 82 | 1.8 | 2.17 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.10 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 83 | 1.7 | 2.18 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.16 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 84 | 1.6 | 2.19 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.30 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 85 | 1.5 | 2.10 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.10 | 7.1 | 8.1 | 9.1 |
| 86 | 1.4 | 2.11 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.16 | 7.2 | 8.2 | 9.2 |
| 87 | 1.3 | 2.12 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6.30 | 7.3 | 8.3 | 9.3 |
| 88 | 1.2 | 2.13 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6.1 | 7.4 | 8.4 | 9.4 |
| 89 | 1.1 | 2.14 | 3.1 | 4.1 | 5.1 | 6.2 | 7.5 | 8.5 | 9.5 |
| 90 | 1.2 | 2.15 | 3.2 | 4.2 | 5.2 | 6.3 | 7.6 | 8.6 | 9.6 |
| 91 | 1.4 | 2.16 | 3.3 | 4.3 | 5.3 | 6.4 | 7.7 | 8.7 | 9.7 |
| 92 | 1.6 | 2.17 | 3.4 | 4.4 | 5.4 | 6.5 | 7.8 | 8.8 | 9.8 |
| 93 | 1.8 | 2.18 | 3.5 | 4.5 | 5.5 | 6.6 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 94 | 1.10 | 2.19 | 3.6 | 4.6 | 5.6 | 6.7 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 95 | 1.12 | 2.14 | 3.7 | 4.7 | 5.7 | 6.8 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 96 | 1.14 | 2.15 | 3.8 | 4.8 | 5.8 | 6.9 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |
| 97 | 1.16 | 2.16 | 3.9 | 4.9 | 5.9 | 6.10 | 7.9 | 8.9 | 9.9 |
| 98 | 1.18 | 2.17 | 3.10 | 4.10 | 5.10 | 6.16 | 7.10 | 8.10 | 9.10 |
| 99 | 1.19 | 2.18 | 3.12 | 4.14 | 5.15 | 6,18 | 7.17 | 8.17 | 9.17 |
| 100 | 1.30 | 2.19 | 3.13 | 4.15 | 5.26 | 6,20 | 7.23 | 8.23 | 9.23 |

**Задание 1.**

1. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова: а) «событие»; б) «статистика».

2. Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что в нем все цифры: а) различные; б) одинаковые; в) нечетные? Известно, что номер телефона не начинается с цифры ноль.

3. Для проведения соревнования 16 волейбольных команд разбиты по жребию на две подгруппы (по восемь команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе.

4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент: а) сдаст зачет; б) не сдаст зачет?

5. Какова вероятность того, что выбранное наугад двузначное число будет: а) кратно трем; б) не менее 70?

6. Среди 15 лампочек 4 стандартных. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.

7. Какова вероятность того, что выбранное наугад двузначное число будет: а) кратно пяти; б) менее 70?

8. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, имеются 5 дефектных. Найти вероятность того, что среди восьми отобранных из этой партии радиоприемников окажутся два дефектных.

9. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) красным; б) цветным (т.е. не белым)?

10. Из полной колоды карт (52 листа) наудачу выбираются 5 карт. Найти вероятность того, что среди них окажутся два туза.

11. Студенту во время экзаменационной сессии необходимо сдать четыре экзамена: по математике, физике, химии и теоретической механике. Предполагая все варианты следования экзаменов друг за другом равновозможными, найти вероятность того, что: а) экзамены по математике и физике будут следовать друг за другом (в любом порядке); б) экзамен по физике будет первым.

12. В связке имеются 7 различных ключей, только одним из которых можно открыть дверь. Наудачу выбирается ключ и делается попытка открыть им дверь. Ключ, оказавшийся неподходящим, больше не используется. Найти вероятность того, что: а) дверь будет открыта первым ключом; б) для открытия двери понадобится не более трех попыток.

13. В партии готовой продукции из 20 изделий имеются 7 изделий высшего сорта. Случайным образом отбираются 6 изделий. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы одно изделие высшего качества.

14. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набирает их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что: а) номер набран правильно с первой попытки (0.05); б) для попадания по нужному номеру понадобится не более четырех попыток.

15. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Львовским заводом. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу кинескопов окажутся 3 кинескопа Львовского завода.

16. При наборе телефонного номера абонент набирает три последние цифры наугад, помня только, что это цифры 1, 3, 7 в каком-то порядке. Найти вероятность того, что: а) номер будет набран правильно с первой попытки; б) для определения нужного номера понадобится не более пяти попыток.

17. В урне находятся 7 белых и 9 черных шаров. Найти вероятность того, что при случайном вынимании из урны пяти шаров среди них окажутся 2 белых и 3 черных шара.

18. Из пяти карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 произвольным образом выбираются две и укладываются на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного опыта равновероятны, найти вероятность того, что полученное таким образом двузначное число будет: а) кратно пяти; б) не менее двадцати.

19. На книжной полке находятся 10 книг по теории вероятностей и 5 по математической статистике. Найти вероятность того, что среди трех произвольным образом взятых с полки книг окажется только одна книга по математической статистике.

20. Из пяти карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5 произвольным образом выбираются две и укладываются на стол в порядке их появления. Предполагая, что все возможные исходы данного опыта равновероятны, найти вероятность того, что полученное таким образом двузначное число будет: а) состоять из цифр «4» и «5»; б) не более 40.

21. В поступившей партии изделий определенного вида 20 изготовлены по первой технологии, а 15 – по второй. Найти вероятность того, что среди пяти случайным образом отобранных из этой партии изделий три изготовлены по первой технологии.

22. Производится подбрасывание двух игральных костей. Чему равна вероятность того, что: а) на обеих костях выпадет равное число очков; б) на обеих костях выпадет четное число очков.

23. Среди 20 билетов выигрышными являются 4. Найти вероятность того, что среди пяти купленных билетов окажутся два выигрышных.

24. Производится подбрасывание двух игральных костей. Чему равна вероятность того, что: а) на костях выпадет разное число очков; б) на одной кости выпадет в два раза больше очков, чем на другой.

25. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, имеются 7 дефектных. Найти вероятность того, что среди восьми отобранных из этой партии радиоприемников окажутся три дефектных.

26. В урне находятся три шара с номерами 1, 2, 3. Случайным образом эти шары один за другим вынимаются из урны. Предполагая все варианты появления шаров равновозможными, найти вероятность того, что: а) шары будут вынуты в порядке: 1 – 2 – 3; б) первым появится шар с номером «3»

27. В партии готовой продукции из 20 изделий имеются 5 изделий высшего сорта. Случайным образом отбираются 7 изделий. Найти вероятность того, что среди них окажется только одно изделие высшего качества.

28. В урне находятся три шара с номерами 1, 2, 3. Случайным образом эти шары один за другим вынимаются из урны. Какова вероятность того, что: а) вторым появится шар с номером «2»; б) шар с номером «3» появится не ранее, чем шар с номером «1»?

29. Подбрасываются четыре монеты. Какова вероятность того, что: а) хотя бы одна монета упадет кверху гербом; б) герб выпадет ровно на двух монетах?

30. В урне находятся 12 белых и 10 черных шаров. Найти вероятность того, что при случайном вынимании из урны пяти шаров среди них окажутся 2 белых и 3 черных шара.

**Задание 2.**

1. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй – 15 из 25. Найти вероятность а) того, что выбранный наудачу студент получил положительную оценку; б) того, что наудачу выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

2. Прибор, работающий в течение времени $t$, состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может за это время выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла выводит прибор из

строя целиком. Вероятность безотказной работы в течение времени $t$ первого узла равна 0,9, второго – 0,95, третьего – 0,8, Найти вероятность того, что в течение времени $t$ прибор выйдет из строя.

3 .Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом: а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам.

4. Мастер обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,6, третий – 0.4 и четвертый – 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.

5. Брак в продукции завода вследствие дефекта $A$ составляет 4%, а вследствие дефекта $B$ – 3,5%. Годная продукция завода составляет 95%. Найти вероятность того что: а) среди продукции, не обладающей дефектом $A$ встретится дефект $B$; б) среди забракованной по признаку $A$ продукции встретится дефект $B$.

6. Сколько раз нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью, не меньшей $p$, можно было утверждать, что по крайней мере один раз произойдет событие, вероятность которого в каждом испытании равна $p$? Дать ответ при $p$=0,4 и $p$=0,8704.

7. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятность отказа элементов соответственно равна 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

8. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,96, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Определить: а) какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия? б) какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку бракованное

9. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8 производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

10. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй – 0,8, третьей – 0,7. Найти вероятность того, что правильно будут решены только две задачи

11. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на 3 из 4 поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность того, что студент: а) сдаст зачет; б) не сдаст зачет?

12. Прибор, работающий в течение времени $t$, состоит из трех узлов, каждый из которых независимо от других может за это время выйти из строя. Неисправность хотя бы одного узла выводит прибор из строя целиком. Вероятность безотказной работы в течение времени t первого узла равна 0,9, второго – 0,95, третьего – 0,8, Найти вероятность того, что в течение времени $t$ прибор выйдет из строя.

13. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентом: а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам.

14. Мастер обслуживает 4 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,6, третий – 0.4 и четвертый – 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок не потребует внимания мастера.

15. Среди 15 лампочек 4 стандартных. Одновременно берут наудачу 2 лампочки. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них нестандартная.

16. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук Вынуты наудачу 3 лампы.

Какова вероятность того что: а) они одинаковой мощности; б) хотя бы две из них по 100 Вт?

17. Брак в продукции завода вследствие дефекта *A* составляет 4%, а вследствие дефекта *B* – 3,5%. Годная продукция завода составляет 95%. Найти вероятность того что: а) среди продукции, не обладающей дефектом *A* встретится дефект *B*; б) среди забракованной по признаку *A* продукции встретится дефект *B*.

18. Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью, не меньшей *p*, можно было утверждать, что по крайней мере один раз произойдет событие, вероятность которого в каждом испытании равна *p*? Дать ответ при $p$=0,4 и $p$=0,8704.

19. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,96, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05. Определить: а) какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия? б) какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку бракованное?

20. В первой урне находится 10 белых и 5 черных шаров. Во второй – 3 белых и 6 черных. Из выбранной наудачу урны, наудачу извлекают один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

21. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0.7; вторым – 0.8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень а) попадет только один из стрелков (любой); б) попадет только второй стрелок; в) мишень останется не пораженной.

22. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0.1; вероятность выбить 9 очков равна 0.2; 8 очков – 0.3; 7 и менее – 0.4. Найти вероятность того, что стрелок при двух выстрелах выбьет не менее 19 очков в сумме.

23. Партия из 100 деталей, содержащая 5% брака, подвергается выборочному контролю. Условием непригодности партии является на-

личие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть не принятой?

24. В урне 5 белых, 4 черных и 5 синих шаров. Из неё извлекают подряд (без возвращения) два шара. Какова вероятность того, что первый шар – черный, второй – синий?

25. В урне имеется 10 шаров. Наудачу из нее извлекают по одному три шара. Найти вероятность того, что последовательно будут извлечены шары с номерами «1», «2», «32, если шары извлекаются без возвращения

26 .Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0.85, 0.8, 0.7. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет хотя бы один из стрелков.

27. Что вероятнее: при подбрасывании четырех монет выпадение двух «гербов» или при подбрасывании 6-ти монет выпадение трех «гербов»? Вычислить эти вероятности.

28. Среди 30 деталей три нестандартные. Наугад извлекаются две детали. Какова вероятность, что среди них хотя бы одна деталь нестандартна.

29. Кубик бросают 10 раз. Найти вероятность того, что «тройка» выпадет менее 2-х раз.

30**.** В урне имеется 10 шаров. Наудачу из неё извлекают по одному три шара. Найти вероятность того, что последовательно будут извлечены шары с номерами «1», «2», «3», если шары извлекаются без возвращения.

**Задание 3.**

1. В стройотряде 70 первокурсников и 30 студентов второго курса. Среда первокурсников 20 девушек, а среди студентов второго курса – 5 девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

2. В сосуд, содержащий 10 шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны.

3. По цели производится три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,1, при втором – 0,2 и при третьем – 0,3. Для поражения цели достаточно двух попаданий. При одном попадании цель поражается с вероятностью 0,6. Найти вероятность поражения цели. Чему равна вероятность одного, двух и трех попаданий?

4. Производится стрельба тремя ракетами по кораблю. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Для потопления корабля достаточно дух попаданий, при попадании одной ракеты корабль тонет с вероятностью 0,7, Найти вероятность того, что корабль будет потоплен.

5. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,3. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

6. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.

7. Счетчик регистрирует частицы трех типов: $A$ , $B$ и $C$ . Вероятность появления этих частиц 0,6, 0,3,0,1. Частица каждого из этих типов счетчиком улавливается с вероятностями 4,0,5,0,3. Счетчик отметил частицу. Определить вероятность того, что это частица типа $B$.

8. Три охотника одновременно сделали по одному выстрелу в медведя. Медведя убили одной пулей. Какова вероятность того, что медведя убил первый охотник, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,8; 0,9, 0,7.

9. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и по два белых шара, а в одной – пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

10. В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75%. Найти вероятность того, что: а) приобретенное изделие окажется нестандартным; б) приобретенное изделие оказалось стандартным. Какова вероятность того, что оно изготовлено третьей фирмой?

11. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,3. В мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что она принадлежит первому стрелку.

12. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.

13. В первой урне находится 5 шаров, из них 2 белых; во второй урне – 10 шаров, из них 6 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую урну. Затем из второй урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что он белый?

14. В пирамиде 5 винтовок, две из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; а из винтовки без оптического прицела – эта вероятность составляет 0.7. Выстрелом из наудачу выбранной винтовки мишень оказалась поражена. Какова вероятность того, что была выбрана обычная винтовка?

15. 50% находящихся в коробке микросхем (МС) изготовлены 1-м заводом, 30% – вторым, остальные – третьим. Вероятности выпуска бракованных МС равны соответственно 0.01, 0.05, 0.07. Найти вероятность того, что наудачу взятая МС будет годной?

16. Микросхема (МС) может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0.2, 0.3, 0.5. Вероятность того, что МС проработает заданное число часов, для этих партий равна соответственно: 0.9, 0.8, 0.7. Найти вероятность того, что МС проработает заданное число часов.

17. В урне 5 белых и 4 черных шара. Из неё извлекают без возвращения два шара. Какова вероятность того, что второй шар белый?

18. В первой урне находится 10 шаров, из них 5 белых; во второй урне – 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Какова вероятность того, что он белый?

19**.** В первой урне находится 5 шаров, из них 2 белых; во второй урне – 10 шаров, из них 6 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую урну. Затем из второй урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что он белый?

20**.** В пирамиде 5 винтовок, две из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; а из винтовки без оптического прицела – эта вероятность составляет 0.7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

21. В первой урне находится 10 белых и 5 черных шаров. Во второй – 3 белых и 6 черных. Из выбранной наудачу урны, наудачу извлекли один шар, он оказался белым. Найти вероятность того, что была выбрана 1-я урна.

22. В первой урне 4 белых шара и 5 черных, во второй – 4 белых и 3 красных. Наудачу выбирается урна и из неё извлекается шар. Какова вероятность того, что он красный?

23. 50% находящихся в коробке микросхем (МС) изготовлены 1-м заводом, 30% – вторым, остальные – третьим. Вероятности выпуска бракованных МС равны соответственно 0.01, 0.05, 0.07. Найти вероятность того, что наудачу взятая МС будет годной.

24. В пирамиде 5 винтовок, две из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; а из винтовки без оптического прицела – эта вероятность составляет 0.7. Выстрелом из наудачу выбранной винтовки мишень оказалась поражена. Какова вероятность того, что была выбрана обычная винтовка?

25. Партия микросхем (МС), среди которых 5% брака, поступила на проверку. При проверке брак обнаруживается с вероятностью 0.95; помимо этого, качественная МС с вероятностью 0.03 может быть признана бракованной. Случайно выбранная МС была признана бракованной; какова вероятность того, что МС действительно бракована?

26. Микросхема (МС) может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: 0.2, 0.3, 0.5. Вероятность того, что МС проработает заданное число часов, для этих партий равна соответственно: 0.9, 0.8, 0.7. Найти вероятность того, что МС проработает заданное число часов.

27**.** В двух урнах находятся по 4 шара, причем в первой урне 3 белых и 1 чёрный; во второй – 2 белых и 2 чёрных. Из выбранной наудачу урны извлекают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые?

28**.** В первой урне находится 3 белых и 1 чёрный шар; во второй – 2 белых и 2 чёрных. Из выбранной наудачу урны извлекли два шара. При этом они оказались одинакового цвета. Какова вероятность того, что шары доставали из первой урны?

29**.** В пирамиде 3 винтовки, две из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель из винтовки с оптическим прицелом, равна 0.95; а из винтовки без оптического прицела – эта вероятность составляет 0.7. Выстрелом из наудачу выбранной винтовки мишень оказалась поражена. Какова вероятность того, что была выбрана винтовка с оптическим прицелом?

30**.** В двух урнах находятся по 4 шара. В первой урне 3 белых и 1 чёрный шар; во второй – 2 белых и 2 чёрных. Из выбранной наудачу урны извлекают два шара. Какова вероятность того, что шары одинакового цвета?

**Задание 4.**

1. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) менее трех

2. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.

3. Завод отправил на базу 500 доброкачественных изделий. Для каждого из изделий вероятность повреждения в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что среди прибывших на базу изделий будет не более трех поврежденных.

4. Производится залп из шести орудий по некоторому объекту. Вероятность попадания в объект из каждого орудия равна 0,6. Найти вероятность ликвидации объекта, если для этого необходимо не менее четырех попаданий

5. По данным технического контроля в среднем 2.5% изготовленных на заводе автоматических станков нуждается в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из шести изготовленных станков четыре станка нуждается в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что число нуждающихся в регулировке станков не менее трех и не более пяти?

6. Определите вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры пять; б) двух и более пятерок; в) ровно двух пятерок Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющееся и равновозможные (считается возможным номер 0000).

7. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Каковы вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит ровно 3 искажения; в) содержит не более трех искажений

8. Если в среднем левши составляют 1%, каковы шансы на то, что среди 200 человек а) окажется ровно четверо левшей; б) найдется четверо левшей

9. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0.02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что а) в коробке не окажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл окажется не более 3; в) сколько нужно класть в коробку сверл, чтобы с вероятностью не меньшей 0,9, в ней было не менее 100 исправных

10. Аппаратура содержит 2000 одинаково сделанных элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность того, что откажет аппаратура, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

11. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%.

12. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

13. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность, что при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз, б) ровно 85 раз.

14. Вероятность некоторого события равна p в каждом из $n$ испытаний. Найти вероятность того, что частота наступления события при $n$=1500 отклонится от $p$=0,4 в ту или другую сторону меньше, чем на 0,02.

15. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,7 не более чем на 0.01.

16. Вероятность появления некоторого события в одном опыте равна 0,6. Какова вероятность тоге, что это событие появится в большинстве из 60 опытов?

17. Имеются 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одном режиме, при котором их привод оказывается включенным в течении 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

18. Два равносильных противника играют в шахматы. Что более вероятно: а) выиграть 2 партии из 4 или 3 партии из 6?; б) не менее 2 партий из 6 или не менее 3 партий из 6? (Ничьи в расчет не принимаются).

19. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.

20. Строительная фирма, занимающаяся установкой летних коттеджей, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 тыс. листков число заказов будет: а) равно 48; б) находиться в границах от 45 до 55.

21. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что: а) тираж содержит 5 бракованных книг; б) по крайней мере 9998 книг сброшюрованы правильно.

22. Известно, что в среднем 60% всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов является продукцией первого сорта. Чему равна вероятность того, что в изготовленной партии окажется: а) 6 аппаратов первого сорта, если партия содержит 10 аппаратов; б) 120 аппаратов первого сорта, если партия содержит 200 аппаратов?

23. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 50% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят: а) 120 студентов, б) не менее 180 студентов.

24. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной равна 0,1?

25. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

26. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 5 раз. Определить вероятность того, что при этом решка выпадет 6 раз.

27. На контроль поступила партия деталей из цеха. Известно, что в среднем 5 % всех деталей не удовлетворяют стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее чем 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

28. Промышленная телевизионная установка содержит 1700 транзисторов. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из транзисторов равна 0,002. Найти вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока: а) хотя бы одного транзистора; б) не менее трех транзисторов.

29. Из промежутка [0;1] наугад выбраны два числа. Какова вероятность того, что их сумма меньше либо равна 1, а их разность больше 0?

30. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший поток событий. Известно, что в течение некоторого промежутка времени среднее число вызовов, поступающих за один час равно 240. Для этого промежутка времени найти вероятность того, что за одну минуту поступит не менее трех вызовов.

**Задание 5.**

1. Товаровед проверяет изделия на стандартность, но проверяет не более пяти изделий. Составить закон распределения числа проверенных изделий, если вероятность того, что изделие будет признано стандартным, равна 0,6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение полученной случайной величины.

2. В лотерее на 1000 билетов разыгрываются три вещи, стоимости которых 50, 30 и 20 рублей. Составить закон распределения суммы выигрыша для лица, имеющего два билета. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение полученной случайной величины.

3. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе пять библиотек. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение полученной случайной величины.

4. Вероятность того, что вошедший в магазин покупатель сделает покупку, равна 0,4. Предполагая, что покупатель делает не более одной покупки, составить закон распределения числа покупок, сделанных в магазине, если вошло 5 человек. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение, полученной случайной величины.

5. Имеются 4 ключа из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения числа попыток открывания замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

6. В магазине имеются 20 телевизоров, из них 7 имеют дефекты. Необходимо: а) составить закон распределения числа телевизоров с дефектами среди выбранных наудачу пяти; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины: в) определить вероятность того, что среди выбранных нет телевизоров с дефектами.

7. Распределение дискретной случайной величины $X$ задано формулой $p\{X=k\} = Ck^2$, где $k$=1, 2, 3, 4, 5. Найти: а) константу $C$; б) вероятность события $|X-2| \leq 1$.

8. Дискретная случайная величина $X$ – число мальчиков в семьях с 4 детьми. Предполагая равновероятными рождения мальчика и девочки: а) найдите закон распределения $X$; б) найдите вероятности событий: $A$ – в семье не менее 2, но не более 3 мальчиков; $B$ – не более 3

мальчиков; $C$ – более одного мальчика. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины $X$.

9. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,8 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 3 выстрелов. Дискретная случайная величина $X$ – число промахов. а) Найдите закон распределения $X$. б) Найдите вероятности событий: $X<2$; $X\le 2$; $1 <X\le 3$. в) Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma [X]$.

10. 2 стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле – 0,6, для второго – 0,7. Дискретная случайная величина $X$ – число попаданий в мишень. а) Найдите закон распределения $X$. б) Найдите вероятность события $X\ge 1$.в) Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

11. В коробке имеется 8 карандашей, из которых 3 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. а) Найдите закон распределения случайной величины $X$, равной числу красных карандашей в выборке. б) Найдите вероятность события $0<X\le 2$. в) Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

12. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали $X$, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 48 мм и не более 52 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 49 мм; б) меньше 51 мм. (Указание: из равенства $P(48<X<52) = 1$ предварительно найти $\sigma$ ).

13. В партии из 10 деталей имеется 5 стандартных. Из этой партии наудачу взято 3 детали. Найдите закон распределения случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке. Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

14. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,5, для второго – 0,6. Найдите закон распределения

случайной величины $X$, равной общему числу попаданий в мишень. Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

15. Рабочий обслуживает 3 независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка – 0,7, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу станков, которые не потребуют внимания рабочего. Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

16. Случайная величина X, сосредоточенная на интервале [2;6], задана функцией распределения $F(x) =1/16(x^2–4x+4)$. Найти вероятность того, что случайная величина $X$ примет значения: а) меньше 4; б) меньше 6; в) не меньше 3; г) не меньше 6.

17. Случайная величина $X$, сосредоточенная на интервале [–1,3], задана функцией распределения $F(x)=0,25x+0,25$. Найти вероятность попадания случайной величины $X$ в интервал [0; 2]. Построить график функции $F(x)$.

18. Случайная величина $X$, сосредоточенная на интервале [2;6], задана функцией распределения $F(x)=1/16(x^2–4x+4)$. Найти вероятность того, что случайная величина $X$ примет значения: а) меньше 4; б) меньше 6; в) не меньше 3; г) не меньше 6.

19. Вероятность попадания стрелком при каждом выстреле равна 0,4. Имея в запасе 6 патронов, он ведет стрельбу до первого попадания в мишень или до израсходования всех патронов. Найдите закон распределения случайной величины $X$, равной числу израсходованных патронов. Найти математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$, среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

20. Случайная величина $X$, сосредоточенная на интервале [2;6], задана функцией распределения $F(x)=1/16(x^2–4x+4)$. Найти вероятность того, что случайная величина $X$ примет значения: а) меньше 4; б) меньше 6; в) не меньше 3; г) не меньше 6.

21. Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить закон распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

22. Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

23. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем – уменьшается на 0,1. Необходимо: а) составить закон распределения числа патронов, израсходованных охотником; б) найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

24. Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 2/3. Составить закон распределения числа заданных студенту вопросов. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

25. Каждый поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Следующий экзамен поступающий сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Составить закон распределения числа экзаменов, сдававшихся поступающим в институт. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

26. По данным длительной проверки качества запчастей определенного вида брак составляет 3%. Изготовлено 1000 запчастей. Определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа годных запчастей.

27. Найти вероятность того, что в течение смены произойдет не более двух отказов оборудования, при условии, что среднее число отказов в течение смены равно 1,6. (Предполагается, что число отказов имеет распределение Пуассона.)

28. Вероятность сдачи первого экзамена для данного студента равна 0.7, второго экзамена – 0.8, третьего – 0.7. С.в. $X$ – число сданных экзаменов. Найти ряд распределения и математическое ожидание с.в. $X$. Вычислить значение функции распределения с.в. $X$ в точках 0; 1; 2,5; 10.

29. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9 . В контрольной партии четыре прибора. С.в. $X$ – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества. Найти ряд распределения и математическое ожидание с.в. $X$. Вычислить значение функции распределения с.в. $X$ в точках 0; 1; 2,5; 10.

30. Функция распределения случайной величины имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0,5*(x^2-x), & 1\le x\le 2;\\ 1, & x>2\end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения с.в. $X$ и построить ее график. Найти медиану с.в. $X$ . Вычислить значение функции распределения с.в. $X$ в точках 0; 1; 2,5; 10. Найти вероятность попадания значения с.в. $X$ в интервал (1.2, 1,5).

**Задание 6.**

1. Все значения равномерно распределенной случайной величины принадлежат отрезку [2, 8]. Найти вероятность попадания случайной величины $X$ в отрезок [3, 5].

2. Найти среднее время безотказной работы устройства, если известно, что для данного устройства вероятность работы без сбоев в течение 100 часов равна 0,2. (Предполагается, что время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону).

3. Время безотказной работы механизма подчинено показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(t)=0{,}04e^{-0{,}04t}$

при $t > 0$ ($t$ – время в часах). Найти вероятность того, что механизм проработает безотказно не менее 100 часов.

4. Время простоя оборудования в ожидании ремонта распределено по показательному (экспоненциальному) закону с математическим ожиданием, равным 2 часа. Найти вероятность простоя более трех часов.

5. Предполагая, что время, необходимое для ремонта поступившего вагона, распределено по показательному (экспоненциальному) закону с параметром $\lambda$=0,125 [час$^{-1}$], найти вероятность того, что для ремонта одного вагона понадобится не более шести часов.

6. В результате проверки точности работы прибора установлено, что 60% ошибок не вышло за пределы ±20 мм, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

7. Случайная величина $X$ распределена нормально с математическим ожиданием $M[X]$=25 и дисперсией $D[X]$=100. Напишите выражение для плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$. Чему равна вероятность события $15 \leq X \leq 35$?

8. Взвешивание на весах производится без систематических ошибок. Случайные ошибки имеют с дисперсию, равную 100 г$^2$. Полагая, что ошибки распределены по нормальному закону, определить вероятность того, что ошибка при взвешивании предмета по абсолютной величине не превысит 50 г.

9. Производится измерение вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением, равным 1 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 1,5 мм.

10. Автоматический станок производит однотипные изделия, номинальный размер которых равен 3 см. Фактический размер изделий имеет разброс, подчиненный нормальному закону с $\sigma[X]$=0,05 см. Систематические отклонения размера отсутствуют. При контроле от-

браковываются все изделия, размер которых отличается от номинального больше, чем на 0,12 см. Определить, какой процент изделий в среднем будет отбраковываться.

11. Случайная величина $X$ распределена нормально с математическим ожиданием $M[X]=25$ и дисперсией $D[X]=100$. Напишите выражение для плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$. Чему равна вероятность события $15 \le X \le 35$?

12. Производится измерение вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением, равным 1 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 1 мм.

13. Случайная величина $X$, сосредоточенная на интервале [2;6], задана функцией распределения $F(x)=1/16(x^2-4x+4)$. Найти вероятность того, что случайная величина $X$ примет значения: а) меньше 4; б) меньше 6; в) не меньше 3; г) не меньше 6.

14. Все значения равномерно распределенной случайной величины $X$ принадлежат отрезку [3; 9]. Найти вероятность попадания значения случайной величины $X$: а) в отрезок [1; 5]; б) в отрезок [4; 10 ].

15. Автоматический станок производит однотипные изделия, номинальный размер которых равен 3 см. Фактический размер изделий имеет разброс, подчиненный нормальному закону с $\sigma[X]=0{,}05$ см. Систематические отклонения размера отсутствуют. При контроле отбраковываются все изделия, размер которых отличается от номинального больше, чем на 0,12 см. Определить, какой процент изделий в среднем будет отбраковываться.

16. Завод изготовляет шарики для подшипников, номинальный диаметр которых равен 10 мм, а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 мм и средним квадратическим отклонением 0,4 мм. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие диаметром 10,7 мм, и все, проходящие через круглое отверстие диаметром 9,3 мм. Какой процент шариков в среднем будет отбраковываться?

17. Случайная величина $X$ – ошибка измерительного прибора распределена по нормальному закону с дисперсией, равной 16 мкм и математическим ожиданием, равным нулю. Найти вероятность того, что величина ошибки при одном измерении не превзойдет по абсолютной величине 6 мкм.

18. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку, равную 5 м и среднее квадратическое отклонение случайной ошибки – 75 м. (Предполагается, что возникающие ошибки распределены по нормальному закону.) Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м?

19. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Найти вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м.

20. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 100 м. Найти вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

21. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически: их средняя масса равна 1,06 кг. Найти среднее квадратическое отклонение, если известно, что 5% коробок имеют массу, меньшую 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

22. Размер деталей подчинен закону нормального распределения с математическим ожиданием 15 мм и дисперсией 0,25 мм$^2$. Определить ожидаемый процент брака, если допустимые размеры деталей находятся в пределах от 14 до17 мм.

23. Найти среднее время безотказной работы устройства, если известно, что для данного устройства вероятность работы без сбоев в течение 100 часов равна 0,2. (Предполагается, что время безотказной работы распределено по экспоненциальному закону.)

24. Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3.6 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных.

25. Время безотказной работы механизма подчинено показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(t) = 0.02e^{-0.02t}$ при $t$>0 ($t$ – время в часах). Найти вероятность того, что механизм проработает безотказно 100 часов.

26. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартной является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Систематические отклонения размера детали от номинала отсутствуют. Зная, что длина стандартной детали 40 см, а среднее квадратичное отклонение равно 0,4 см, определить, какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8.

27. Случайная ошибка измерения дальности импульсным радиодальнометром имеет нормальное распределение со средним квадратическим отклонением, равным 50 м. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отличаться по абсолютной величине от истинного не более чем на 30 м, если систематическая ошибка дальнометра равна +20 м.

28. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,04А.

29. Валик, изготовленный автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько стандартных валиков (в %) изготовляет автомат?

30. Предполагая, что время, необходимое для ремонта поступившего вагона, распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda$=0,25[час$^{-1}$], найти вероятность того, что для ремонта одного вагона понадобится не более шести часов.

**Задание 7.**

В результате наблюдений над некоторой случайной величиной получена следующая выборка. Используя эти данные, необходимо:

1) сделать механическую выборку, отобрав 25 значений (каждое пятое считая в порядке записи сверху вниз по колонкам и по этой выборке);

2) записать эмпирическую функцию распределения;

3) построить интервальный вариационный ряд;

4) построить гистограмму и эмпирическую кривую распределения;

5) предполагая, что генеральная совокупность имеет нормальное распределение с плотностью $f_x(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

найти методом моментов по выборке из 1) статистические оценки неизвестных параметров $a$ и $\sigma^2$;

6) найти доверительные интервалы для $a$ и $\sigma^2$ с доверительной вероятностью 0,95.

7.1

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность безотказного функционирования устройства (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.2

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность выполнения технологической операции (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 35.7985 | (11) 33.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 37.2978 | (12) 39.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 38.5226 | (13) 35.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 38.7486 | (14) 34.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 34.3587 | (15) 35.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 33.2306 | (16) 35.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 34.4744 | (17) 38.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 36.7948 | (18) 40.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 37.9989 | (19) 37.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 35.6923 | (20) 35.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.3

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность безотказного функционирования устройства (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 45.7985 | (11) 43.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 47.2978 | (12) 49.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 48.5226 | (13) 45.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 48.7486 | (14) 44.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 44.3587 | (15) 45.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 43.2306 | (16) 45.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 44.4744 | (17) 48.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 46.7948 | (18) 40.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 47.9989 | (19) 47.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 45.6923 | (20) 45.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.4

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность безотказного функционирования устройства определенного вида (в сутках).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 33.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 39.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 35.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 34.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 35.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 35.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 38.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 37.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 35.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.5

Случайная величина $X$ характеризует массу изготовленной детали определенного вида (в кг).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 37.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 38.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 34.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 37.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 38.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 36.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 35.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 37.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 38.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 35.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.6

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность безотказного функционирования устройства (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 39.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 39.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 39.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 33.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 37.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 34.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 39.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 39.6166 | (50) 26.7133 |

7.7

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность устранения дефекта определенного вида (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 35.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 33.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 34.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 33.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 34.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 39.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 39.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 36.7133 |

7.8

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность безотказного функционирования устройства (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 45.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 47.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 48.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 48.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 44.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 43.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 44.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 46.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 47.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 45.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.9

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность выполнения технологической операции (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 43.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 49.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 45.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 44.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 45.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 45.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 48.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 40.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 47.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 45.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.10

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность устранения дефекта определенного вида (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 47.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 48.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 44.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 47.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 48.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 46.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 45.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 47.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 48.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 45.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.11

Случайная величина *X* характеризует продолжительность ожидания детали в накопителе до отправки на упаковочный конвейер (в мин.).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 49.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 40.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 40.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 49.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 49.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 43.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 47.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 44.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 49.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 49.6166 | (50) 26.7133 |

7.12

Случайная величина *X* характеризует время простоя устройства в ожидании переналадки (в минутах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 40.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 45.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 43.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 44.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 43.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 40.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 44.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 49.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 49.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 46.7133 |

7.13

Случайная величина *X* характеризует продолжительность устранения дефекта определенного вида (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 21.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 22.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 23.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 24.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 25.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 26.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 27.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 28.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 29.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 20.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.14

Случайная величина *X* характеризует продолжительность безотказного функционирования устройства определенного вида (в сутках).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 21.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 22.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 23.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 26.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 27.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 38.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 29.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 20.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.15

Случайная величина *X* характеризует продолжительность выполнения технологической операции.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 21.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 22.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 23.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 24.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 25.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 27.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 28.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 29.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 20.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.16

Случайная величина *X* характеризует продолжительность устранения дефекта определенного вида (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 21.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 32.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 33.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 24.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 25.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 26.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 28.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 20.6166 | (50) 26.7133 |

7.17

Случайная величина *X* характеризует среднемесячную заработную плату работников некоторого предприятия (в условных ден. един.).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 31.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 22.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 25.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 36.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 27.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 28.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 20.7133 |

7.18

Случайная величина *X* характеризует время пребывания детали на общем конвейере (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 22.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 22.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 22.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 22.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 22.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 22.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 22.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 22.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 22.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 22.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.19

Случайная величина *X* характеризует среднемесячную заработную плату работников некоторого предприятия (в условных ден. един.).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 23.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 23.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 23.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 23.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 23.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 23.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 33.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 23.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 23.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.20

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность выполнения определенной технологической операции (в минутах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 24.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 24.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 24.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 24.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 24.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 24.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 24.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 24.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 24.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.21

Случайная величина $X$ характеризует время пребывания детали на общем конвейере (в минутах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 25.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 35.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 35.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 25.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 25.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 25.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 25.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 25.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 25.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 25.6166 | (50) 26.7133 |

7.22

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность выполнения определенной технологической операции (в часах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 36.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 26.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 26.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 26.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 26.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 36.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 26.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 26.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 26.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.23

Случайная величина *X* характеризует время обработки детали определенного вида на станке (в минутах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 27.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 27.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 27.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 27.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 27.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 27.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 27.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 27.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.24

Случайная величина *X* характеризует внутренний радиус изготовленной на станке детали (в мм).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 28.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 28.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 28.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 28.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 28.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 28.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 38.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 28.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 28.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.25

Случайная величина *X* характеризует время простоя оборудования в ожидании ремонта.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 29.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 29.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 29.4059 | (33) 30.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 29.5624 | (34) 29.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 29.9174 | (35) 29.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 29.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 29.9613 | (37) 27.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 29.0814 | (38) 24.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 29.8153 | (39) 29.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 29.1591 | (40) 29.6166 | (50) 26.7133 |

7.26

Случайная величина *X* характеризует время, затрачиваемое на доставку продукции от поставщика потребителю.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 21.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 31.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 31.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 21.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 21.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 21.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 21.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 21.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 21.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 21.6166 | (50) 26.7133 |

7.27

Случайная величина *X* характеризует время простоя оборудования в ожидании ремонта.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 20.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 20.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 20.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 20.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 20.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 20.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 20.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 20.7133 |

7.28

Случайная величина *X* характеризует время обработки детали определенного вида на станке (в минутах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 35.7951 |
| ( 2) 25.2978 | (12) 29.4075 | (22) 28.6561 | (32) 30.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 25.5226 | (13) 25.8035 | (23) 24.4059 | (33) 30.9916 | (43) 25.8167 |
| ( 4) 25.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 25.7476 |
| ( 5) 25.3587 | (15) 25.3773 | (25) 28.9174 | (35) 29.9391 | (45) 25.3705 |
| ( 6) 25.2306 | (16) 25.3216 | (26) 26.6193 | (36) 23.6529 | (46) 35.4135 |
| ( 7) 25.4744 | (17) 28.7622 | (27) 25.9613 | (37) 27.1893 | (47) 25.2096 |
| ( 8) 25.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 25.6136 |
| ( 9) 25.9989 | (19) 27.0493 | (29) 28.8153 | (39) 29.3138 | (49) 25.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 25.1591 | (40) 29.6166 | (50) 25.7133 |

7.29

Случайная величина $X$ характеризует удельный вес прореагировавшего в течение одной минуты вещества (в процентах).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 26.6532 | (21) 27.4098 | (31) 26.1856 | (41) 30.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 26.4075 | (22) 28.6561 | (32) 36.2499 | (42) 25.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 26.8035 | (23) 24.4059 | (33) 36.9916 | (43) 23.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 26.9188 | (24) 27.5624 | (34) 26.3445 | (44) 24.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 26.3773 | (25) 28.9174 | (35) 26.9391 | (45) 23.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 26.3216 | (26) 26.6193 | (36) 26.6529 | (46) 30.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 26.7622 | (27) 25.9613 | (37) 26.1893 | (47) 24.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 36.6574 | (28) 27.0814 | (38) 26.8246 | (48) 29.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 26.0493 | (29) 28.8153 | (39) 26.3138 | (49) 29.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 26.5494 | (30) 25.1591 | (40) 26.6166 | (50) 26.7133 |

7.30

Случайная величина $X$ характеризует продолжительность ожидания детали в накопителе до отправки на упаковочный конвейер (в мин.).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ( 1) 25.7985 | (11) 23.6532 | (21) 27.4098 | (31) 29.1856 | (41) 31.7951 |
| ( 2) 27.2978 | (12) 29.4075 | (22) 27.6561 | (32) 30.2499 | (42) 21.0384 |
| ( 3) 28.5226 | (13) 25.8035 | (23) 27.4059 | (33) 30.9916 | (43) 21.8167 |
| ( 4) 28.7486 | (14) 24.9188 | (24) 27.5624 | (34) 29.3445 | (44) 21.7476 |
| ( 5) 24.3587 | (15) 25.3773 | (25) 27.9174 | (35) 29.9391 | (45) 21.3705 |
| ( 6) 23.2306 | (16) 25.3216 | (26) 27.6193 | (36) 23.6529 | (46) 31.4135 |
| ( 7) 24.4744 | (17) 28.7622 | (27) 27.9613 | (37) 27.1893 | (47) 21.2096 |
| ( 8) 26.7948 | (18) 30.6574 | (28) 27.0814 | (38) 24.8246 | (48) 21.6136 |
| ( 9) 27.9989 | (19) 27.0493 | (29) 27.8153 | (39) 29.3138 | (49) 21.7766 |
| (10) 25.6923 | (20) 25.5494 | (30) 27.1591 | (40) 29.6166 | (50) 21.7133 |

**Задание 8.**

Получить механическую выборку из данных, приведенных в задании 7, отобрав 25 значений (каждое второе, считая в порядке записи сверху вниз по колонкам и по этой выборке). Используя критерий согласия Пирсона, проверить согласие выборочных значений с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности с параметрами, оцененными предварительно по выборке.

**Задание 9.**

Получить две механические выборки, объемом по 25 значений, из данных, приведенных в задании 7, включая в первую значения, стоящие на нечетных местах, а во вторую – на четных (нумерация производится по колонкам).

Найти выборочное уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$ по результатам двух выборок, считая первую выборку значениями $X$ ,а вторую – $Y$. Проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции.

*ПРИЛОЖЕНИЕ А*
*(справочное)*

# Таблица значений функции плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

| **x** | **Сотые доли x** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0,3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3725 | 3712 | 3697 |
| 0,4 | 3683 | 3668 | 3653 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1,1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1,2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1,3 | 1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1,7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1,8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1,9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2,0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2,2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2,4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2,5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2,9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3,1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | 0011 | 0011 | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3,6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |
| ∞ | 0,0000 | | | | | | | | | |

*ПРИЛОЖЕНИЕ Б*
*(справочное)*

# Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

| *x* | **Сотые доли *x*** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,0000 | 0040 | 0080 | 0120 | 0160 | 0199 | 0239 | 0279 | 0319 | 0359 |
| 0,1 | 0398 | 0438 | 0478 | 0517 | 0557 | 0596 | 0636 | 0675 | 0714 | 0753 |
| 0,2 | 0793 | 0832 | 0871 | 0910 | 0948 | 0987 | 1026 | 1064 | 1103 | 1141 |
| 0,3 | 1179 | 1217 | 1255 | 1293 | 1331 | 1368 | 1406 | 1443 | 1480 | 1517 |
| 0,4 | 1554 | 1591 | 1628 | 1664 | 1700 | 1736 | 1772 | 1808 | 1844 | 1879 |
| 0,5 | 1915 | 1950 | 1985 | 2019 | 2054 | 2088 | 2123 | 2157 | 2190 | 2224 |
| 0,6 | 2257 | 2291 | 2324 | 2357 | 2389 | 2422 | 2454 | 2486 | 2517 | 2549 |
| 0,7 | 2580 | 2611 | 2642 | 2673 | 2704 | 2734 | 2764 | 2794 | 2823 | 2852 |
| 0,8 | 2881 | 2910 | 2939 | 2967 | 2995 | 3023 | 3051 | 3078 | 3106 | 3133 |
| 0,9 | 3159 | 3186 | 3212 | 3238 | 3264 | 3289 | 3315 | 3340 | 3365 | 3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 3438 | 3461 | 3485 | 3508 | 3531 | 3554 | 3577 | 3599 | 3621 |
| 1,1 | 3643 | 3665 | 3686 | 3708 | 3729 | 3749 | 3770 | 3790 | 3810 | 3830 |
| 1,2 | 3849 | 3869 | 3888 | 3907 | 3925 | 3944 | 3962 | 3980 | 3997 | 4015 |
| 1,3 | 4032 | 4049 | 4066 | 4082 | 4099 | 4115 | 4131 | 4147 | 4162 | 4177 |
| 1,4 | 4192 | 4207 | 4222 | 4236 | 4251 | 4265 | 4279 | 4292 | 4306 | 4319 |
| 1,5 | 4332 | 4345 | 4357 | 4370 | 4382 | 4394 | 4406 | 4418 | 4429 | 4441 |
| 1,6 | 4452 | 4463 | 4474 | 4484 | 4495 | 4505 | 4515 | 4525 | 4535 | 4545 |
| 1,7 | 4554 | 4564 | 4573 | 4582 | 4591 | 4599 | 4608 | 4616 | 4625 | 4633 |
| 1,8 | 4641 | 4649 | 4656 | 4664 | 4671 | 4678 | 4686 | 4693 | 4699 | 4706 |
| 1,9 | 4713 | 4719 | 4726 | 4732 | 4738 | 4744 | 4750 | 4756 | 4761 | 4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 4778 | 4783 | 4788 | 4793 | 4798 | 4803 | 4808 | 4812 | 4817 |
| 2,1 | 4821 | 4826 | 4830 | 4834 | 4838 | 4842 | 4846 | 4850 | 4854 | 4857 |
| 2,2 | 4861 | 4864 | 4868 | 4871 | 4875 | 4878 | 4881 | 4884 | 4887 | 4890 |
| 2,3 | 4893 | 4896 | 4898 | 4901 | 4904 | 4906 | 4909 | 4911 | 4913 | 4916 |
| 2,4 | 4918 | 4920 | 4922 | 4925 | 4927 | 4929 | 4931 | 4932 | 4934 | 4936 |
| 2,5 | 4938 | 4940 | 4941 | 4943 | 4945 | 4946 | 4948 | 4949 | 4951 | 4952 |
| 2,6 | 4953 | 4955 | 4956 | 4957 | 4959 | 4960 | 4961 | 4962 | 4963 | 4964 |
| 2,7 | 4965 | 4966 | 4967 | 4968 | 4969 | 4970 | 4971 | 4972 | 4973 | 4974 |
| 2,8 | 4974 | 4975 | 4976 | 4977 | 4977 | 4978 | 4979 | 4979 | 4980 | 4981 |
| 2,9 | 4981 | 4982 | 4982 | 4983 | 4984 | 4984 | 4985 | 4985 | 4986 | 4986 |
| 3,0 | 0,49865 | | | | | | | | | |
| 3,1 | 0,49903 | | | | | | | | | |
| 3,2 | 0,49931 | | | | | | | | | |
| 3,3 | 0,49952 | | | | | | | | | |
| 3,4 | 0,49966 | | | | | | | | | |
| 3,6 | 0,499841 | | | | | | | | | |
| 3,8 | 0,499928 | | | | | | | | | |
| 4,0 | 0,499968 | | | | | | | | | |
| 4,5 | 0,499997 | | | | | | | | | |
| 5,0 | 0,4999997 | | | | | | | | | |
| ∞ | 0,5 | | | | | | | | | |

## ЛИТЕРАТУРА

1 **Андронов, А. М.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. для вузов / А. М. Андронов, Е. А. Копытов, Л. Я. Гринглаз. – СПб. : Питер, 2004. – 461 с.

2 **Бородин, А. Н.** Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А. Н. Бородин. – СПб. : Лань, 1998. – 224 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей : учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1998. – 576 с.

4 **Герасимович, А. И.** Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк., 1983. – 275 с.

5 **Гмурман, В. Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 479 с.

6 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1998. – 400 с.

7. **Евдокимович, В.Е.** Основы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие / В.Е. Евдокимович.– Гомель : УО «БелГУТ», 2007.–122 с.

8. **Курносенко, Н.М., Евдокимович, В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика : практическое пособие / Н.М. Курносенко, В.Е. Евдокимович.– Гомель : УО «ГГУ им.Ф.Скорины», 2006.–86 с.

9. **Малинковский, Ю. В.** Теория вероятностей и математическая статистика (часть 1. Теория вероятностей) : учеб. пособие / Ю. В. Малинковский. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф.Скорины», 2004. – 355 с.

10. **Пугачёв, В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Пугачёв. – М. : Наука, 1979. – 496 с.

11. **Лагойкин, А. Н.** Теория вероятностей (сборник заданий и методические указания по РГР) / А. Н. Лагойкин, В. С. Серёгина, А. Ю. Сокольский. – Гомель : БелГУТ, 1994. – 52 с.

12. **Сазонова, Е. Л.** Теория вероятностей : пособие для студентов ФБО. Ч.1. Теория вероятностей / Е. Л. Сазонова; под ред. В. С. Серёгиной. – Гомель : БелГУТ, 2000. – 95 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ